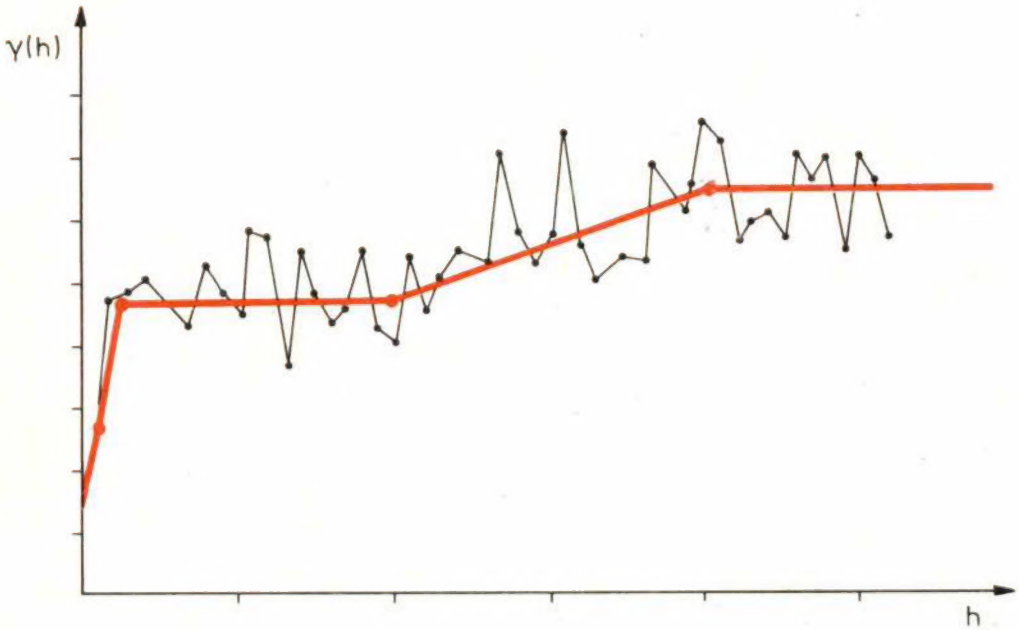
técnica

1º SEMINÁRIO DE GEOMATEMÁTICA



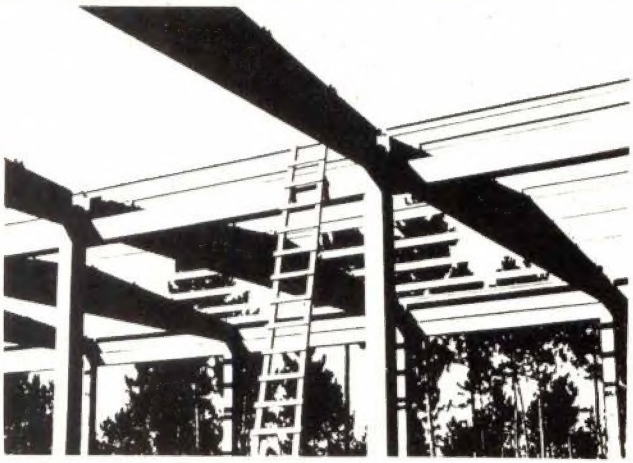
C.V.R.M.U.T.L. CENTRO DE VALORIZAÇÃO DE RECURSOS MINERAIS DA UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

451/452

associação dos estudantes do instituto superior técnico

janeiro/fevereiro/março 1979 revista de engenharia

SOMAPRE



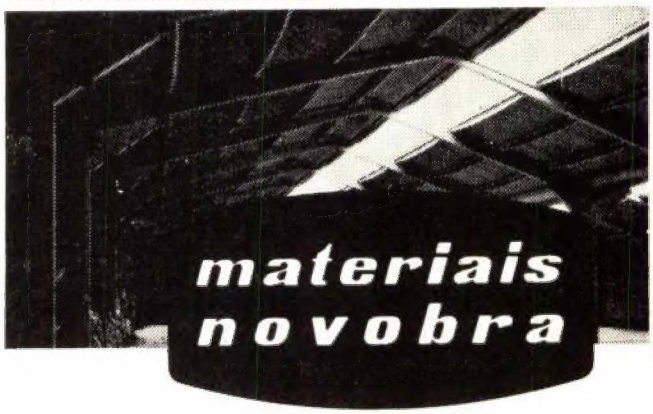
COBERTURAS
PARA TODOS OS FINS

SOMAPRE

SOCIEDADE DE MATERIAIS PRÉESFORÇADOS, S.A.R.L.
Av. da República, 83-2.º – tel. 76 00 45/6/7/8 – Lisboa

PÓRTICOS «CRENDON»

De pré-fabricacão total, montagem rapidíssima feita pelas n/ equipas especializadas e de aproveitamento total de todo o espaço em altura visto não existirem linhas de asnas.



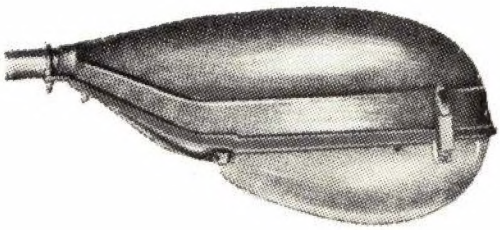
A mais vasta gama em pré-fabricados de betão.

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, «post-esforço Losinger», pontões, vigas de grande vão, pórticos «Crendon», pavimento «Trief», protecção de segurança «Trief», mosaicos, tubos, blocos «Leca», espaçadores de betão, estacas para vinhas e pomares e pré-fabricação total ou parcial.

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita.

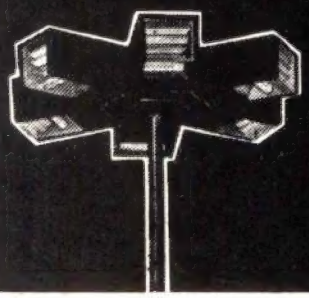
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt.º — Lisboa-5
Telefones — Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 • Telex: 18373 NOVOBA P
Serviços Técnicos: 89 41 16/7/8 - 89 93 31/2

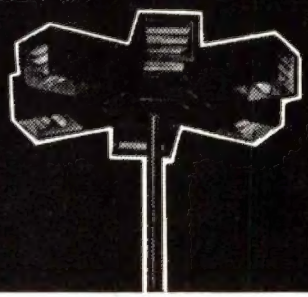
CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS



ARMADURA DM

Iluminação
é o nosso ofício





SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide — Tel. 218 00 37

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA LISBOA

OFERTA

técnica

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Luís S. V. Azevedo

COLABORADORES
João José Águas
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

FUNCIONÁRIOS
Jorge Graça
Fernanda Sanches

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 88 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

•

ASSINATURAS:

	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	300$00	450$00
Países de língua Portuguesa e Espanha...	350$00	550$00
Estrangeiro	—	700$00
Número duplo avulso...	—	200$00

Encontram-se à venda na Secção Técnica, A. E. I. S. T., praticamente todos os números publicados até à data. Os preços são:

1 a 430 (inclusive) — 10$00 ex.
431 a 437 (») — 35$00 ex.
438 a 450 (») — 60$00 ex.
451 e seguintes — 80$00 ex.

* Excepto números duplos ou especiais.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

•

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques Bragança, 6 — 1200 LISBOA

SUMÁRIO

79 — EDITORIAL

84 — LISTA DE PARTICIPANTES

89 — HENRIQUE GARCIA PEREIRA — Introdução às variáveis regionalizadas.

Introduction to the regionalized variables.

97 — LEOPOLDO PARREIRA CORTEZ — Introdução à estimação geoestatística.

Introduction to geostatistical estimation.

139 — FERNANDO HUMBERTO MUGE — Prática de Krigeagem.

The practice of Kriging.

151 — JOSÉ QUINTINO ROGADO — Uma nova parametrização de jazidas minerais.

A new parametrical description of ore bodies.

157 — JOÃO CARVALHO MARQUES — Teoria e prática de amostragem de materiais a granel segundo o formalismo de P. Gy.

Particulate material sampling theory and practice by P. Gy formalism.

203 — JOSÉ QUINTINO ROGADO — Representatividade da amostragem de jazidas minerais.

Representativity of ore bodies sampling.

209 — HENRIQUE GARCIA PEREIRA — Introdução à simulação.

Introduction to simulation.

225 — PETER DOWD — The conditional simulation of regionalized variables.

Simulação condicional de variáveis regionalizadas.

235 — HEITOR SIMÕES SANTOS — Avaliação económica de projectos mineiros por simulação.

Mining projects under risk analysis concepts.

261 — FERNANDO HUMBERTO MUGE — **Determinação do contorno final dum desmonte a céu aberto («Ultimate Pit»).**
Determination of an optimal Ultimate Pit contour.

271 — J. BEJA COSTA e JORGE VALENTE — **Programação de desmontes em lavra subterrânea.**

The transportation system planning in underground mining.

293 — ALEX OBLAD — **Process analysis and simulation in extractive metallurgy by stochastic and deterministic methods.**

Métodos estocásticos e determinísticos de análise e simulação em processos da metalurgia extractiva.

315 — D. GUIBAL — **Le parametrage des reserves.**

A parametrização das reservas.

321 — PETER DOWD — **Dynamic programming and its applications to cut-off grade problems.**

Aplicações da programação dinâmica à determinação de teores de corte.

137 — NOTICIÁRIO

AOS NOSSOS LEITORES

Face à galopante subida de preços das matérias-primas, em especial do papel, da mão-de-obra e do funcionalismo, para garantir a nossa subsistência económica necessário foi a adopção de algumas medidas que, embora não tornando esta secção lucrativa, permitissem minorar os prejuízos que dela advêm.

Assim, depois de ponderar devidamente o problema, decidimos alterar a nossa tabela de Assinaturas dada a sua por demais evidente desactualização e cuja forma actual expomos seguidamente.

Agradecemos desde já toda a colaboração prestada e apelamos uma vez mais para a vossa compreensão.

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
— Continente e Ilhas	300$00	450$00
— Países de língua Portuguesa e Espanha	350$00	550$00
— Estrangeiro	—	700$00
— Número avulso	—	80$00

CONSELHO CIENTÍFICO

Alves, Luís de Almeida
Barros, Luís A. Aires
Calado, Jorge C. G.
Conte, J. C.
Costa, Fernando Vasco
Dias, A. Romão
Domingos, J. J. Delgado
Faro, Manuel José de Abreu
Ferreira, J. Campos
Figanier, J. P.
Garrido, M. S.
Horta, Ricardo Bayão
Loureiro, A. Pádua
Manzanares, Alberto Abecasis
Moura, Domingos
Moura, J. M. Fonseca de
Moutinho, A. M. C.
Oliveira, E. R. de Arantes e
Portela, A. Gouvêa
Quintela, António de Carvalho
Rogado, José Quintino
Santos, A. F. Ferreira dos
Serafim, J. Laginha
Simões, F. Rebelo
Silva, J. Borges da
Tavares, L. Valadares
Trindade, Rocha

NORMAS PARA ENTREGA DE ARTIGOS

Chamamos a atenção dos Autores para as seguintes normas referentes à entrega de artigos:

1) Só se aceitam artigos dactilografados.
2) Os artigos deverão vir acompanhados de resumos em português e inglês.
3) Qualquer dos resumos não poderá exceder oitenta palavras.
4) Não serão aceites trabalhos excedendo 30 páginas (incluindo desenhos, fotografias, listagens de computador...).
5) Será dada prioridade de publicação a notas científicas que não excedam duas páginas no total.
6) Não se aceitam trabalhos já publicados em revistas estrangeiras.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Aguiar & Melo, Lda.	XVII
ATLAS COPCO	VI
Beiersdorf Portuguesa, Lda. «Tesa»	VIII e IX
CIMPOR — Cimentos de Portugal E. P.	X
Construções Schréder	2.ª da capa
Crosby Europe	XVIII
Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.	II
FÉRIA-SERIC, Lda.	III
FERROMINAS E. P.	II
Georges Fischer, AG	IV
GTR — Gab. Técnico de Revestimentos, Lda.	XIV
Ingersoll-Rand	VII
MAGUE	V
Metropolitano de Lisboa	XV
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Philips Portuguesa, S. A. R. L.	XIII e XVI
Soc. Electricidade Brown Boveri	XI
Soc. Portuguesa Cavan	III
SOMAPRE	2.ª da capa
Sondagens Foraky, Lda.	III
Sopecate	III
SOREFAME — Soc. Reunidas de Fabricações Metálicas, S. A. R. L.	4.ª da capa
S. K. F., Lda.	I
TIME-SHARING — Soc. portuguesa de computadores em tempo dividido, S. A. R. L.	XII
TUDOR	XVIII

Colaboraram neste número as seguintes Agências de Publicidade:

IVA AG FÜR INTERNATIONAL WERBUNG, ABRINICIO, ESPIRAL, HORA e JDM — JARVIS DAY MOUSELL INTERNATIONAL, LTD,

técnica

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

EDITORIAL

1 — Com a publicação, do primeiro tomo do Traité de Géostatistique Appliqué *de G. Matheron* [7], *concretizava-se passo muito importante na Geomatemática — nascia, pelo menos para os investigadores francófonos, a Geoestatística, que até então tivera incipiente expressão em revistas especializadas e relatórios internos de empresas ou serviços públicos.*

Com efeito, quer na versão transitiva, *quer no modelo do* esquema intrínseco, *a Geoestatística, criada por G. Matheron, mostrava a inconsistência da atitude estatística «ingénua» e/ou da posição funcionalista «a todo o custo» que imperavam na Geomatemática.*

Simultaneamente, a Geoestatística elaborava explicação teórica e, portanto, conferia certo conteúdo semântico às evidências experimentais levantadas pelos problemas da avaliação do teor de blocos e painéis e da evolução da respectiva variância de estimação com a dimensão dos mesmos, as quais Krige, Sichel, De Wijs e outros haviam, com rigor exemplar, definitivamente consolidado, uma década atrás.

Das duas teses de doutoramento de G. Matheron, a primeira Les Variables Rgionalisées et leur Estimation [8], *publicada em 1965, tornou-se pelo rigor e acabamento, fonte de inspiração teórica que fez escola, aliás, corporizada no Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau a que se veio juntar o Centre de Géostatistique, ambos ligados à École Nationale Supérieure des Mines de Paris.*

Em Fontainebleau, já em 1969, reunia G. Matheron as suas lições no fascículo 1 dos Cahiers [11], *concatenando aí notável desenvolvimento teórico da* krigagem, *dentro do modelo das funções aleatórias, esclarecendo deste modo, para aquele interpolador linear não condicional, o seu rigoroso significado e, simultaneamente, explicitando, pela primeira vez, de forma correcta, o conceito de* deriva *(tendência) com o qual a Geofísica e a Geomatemática se debatiam, envolvidas em sérias confusões epistemológicas. Não pode, todavia, deixar de apontar-se as dificuldades práticas da chamada* krigagem universal *assim desenvolvida, principalmente resultantes do «peso» de cálculo que pode exigir e da impossibilidade, na maioria dos casos, de o automatizar* [4].

Paralelamente, J. Serra, colaborador de G. Matheron, introduz a transformada que tem o seu nome e constrói o analisador de texturas que, na actual versão sofisticada, constitui o maior avanço da última década no que concerne à morfologia automática.

A segunda tese de C. Matheron, publicada em 1967 [9] *e infelizmente tão pouco citada, apesar do recente* Random Sets & Integral Geometry [13], *influencia fortemente o fascículo 3 dos* Cahiers [23], *onde J. Serra sumariza as suas lições no Centro e que constitui marco definitivo para uma tipologia morfológica ainda por acabar.*

Se considerarmos o objecto da Geoestatística — as variáveis regionalizadas, grandezas de carácter topo-probabilístico exprimindo casualidade fraca — não é de estranhar que surjam aplicações, logo na década de 60, em domínios que não o geológico e mineiro, como por exemplo, a cartografia automática e submarina, a avaliação e controle da exploração de florestas (1), *a meteorologia, etc., as quaislevantam problemas difíceis, dispondo-se apenas, como formalização mais sofisticada, do esquema intrínseco, isto é, das funções aleatórias intrínsecas de ordem 0.*

---

(1) Segundo G. Matheron dever-se-ia a B. Matern a introdução da terminologia das funções aleatórias no estudo das variáveis regionalizadas (c. f. Matern, B. 1959. Spatial variations. Almaenna Foerlaget, Stockolm).

Esta limitação é mitigada pela utilização, a partir de 1973, das funções aleatórias intrínsecas de ordem k, a que correspondem covariâncias generalizadas, satisfatoriamente interpoláveis, por exemplo, por polinómios de grau não elevado.

Com efeito, G. Matheron [**12**] *formalizou, sempre no âmbito das funções aleatórias, a metodologia apta a tratar variáveis regionalizadas de modo nenhum estacionárias, adaptando aos atributos espaciais a conhecida prática usada no tratamento das séries cronológicas não estacionárias, a qual consiste em calcular sucessivas diferenças finitas até que surjam grandezas quase-estacionárias com as quais se trabalha* (1)*, metodologia esta que vai sendo testada nas aplicações levantando, com frequência, dificuldades operacionais, nomeadamente na krigagem universal* [**14**]*, que é seu domínio próprio.*

Por outro lado, problemas práticos derivados do facto da Natureza, no quadro do formalismo das funções aleatórias, apenas fornecer uma realização única daquelas ou da classe de funções aleatórias elegida como modelo, levaram a considerar a simulação de variáveis regionalizadas ,nomeadamente no caso de jazidas minerais.

Assim, em 1974, a tese de doutoramento de A. Journel [**5**] *explicita o trabalho da escola de Fontainebleau usando engenhosa metodologia, a qual tem sido cada vez mais aplicada na previsão do valor expectável das respostas das variáveis regionalizadas estacionárias a várias classes de operadores, embora a sua utilização aos casos nitidamente não estacionários só tenha sido esboçada muito recentemente* [**14**].

O impasse da realização única, incluso na conceptualização que recorre às funções aleatórias, obteve, deste modo, uma saída pragmática rigorosa no seu próprio âmbito.

A estrutura revelada até ao momento de ordem dois e pelo histograma, na única realização, constitui o condicionamento da simulação, a qual tem, portanto, o valor que tiver a inferência possível a partir de tal realização. Porém, a não existência de testes de significância para a prática da inferência, ou a impossibilidade de usar aqueles de que se dispõe, leva, por vezes, os estatísticos ortodoxos a olhar suspeitosamente aquelas simulações e, daí, que, aqui também e cada vez mais, se fale da robustez das estatísticas inferidas e, em desespero de causa, se multipliquem as simulações (graças ao recurso ao computador) para mostrar que as esperanças sobre o conjunto daquelas é coerente com as médias espaciais obtidas, por exemplo, por krigagem, explicitando-se, deste modo, por via «experimental», a ergodicidade implícita no próprio modelo.

Entretanto, multiplicam-se por toda a parte as aplicações e, por força destas, surge a Geoestatística mineira onde avulta a revisão do conceito de parametrização, com a sua base teórica alicerçada em certo tipo de convexo que é, mais uma vez, G. Matheron que estrutura em 1975.

E, como não podia deixar de ser, «software» é intensamente desenvolvido para aplicação a casos concretos.

Para lá do problema da inferência, a Geoestatística mineira enfrentou duas dificuldades igualmente importantes, depois de haver posicionado com rigor o significado do suporte.

Um deles é o da impossibilidade de conhecer, excepto em alguns casos favoráveis, o histograma dos valores reais da variável regionalizada, uma vez determinado o histograma dos interpoladores de krigagem (que é um estimador linear não condicional e não enviezado), embora se saiba encontrar a variância de dispersão das grandezas reais.

O outro consiste em prever qual será o histograma dos futuros estimadores em fase adiantada do reconhecimento mineiro ou mesmo durante a exploração da jazida, havendo disponível mais informação, o que é de importância evidente, porquanto será à custa dessa informação adicional que se tomarão, na maioria dos casos, as decisões ao nível da exploração.

Este segundo problema conduziu ao aparecimento da Geoestatística não linear onde é relevante o conceito de função de transferência *introduzido por G. Matheron, à custa do qual é possível realizar a* krigagem disjuntiva, *isto é, construir um estimador condicional fraco dos teores dos blocos sobre os quais se irão tomar as opções de exploração e tratamento.*

Notar, todavia, que a krigagem disjuntiva fornece apenas os histogramas expectáveis tendo por suporte pequenos blocos.

Por outro lado, convém referir que, nas aplicações, o variograma se tem tornado o instrumento universal da Geoestatística linear. Os seus utilizadores empregam-no para a interpretação estrutural das variáveis regionalizadas que estudam.

---

(1) De referir que o conceito de variograma, tão usado em Geoestatística, também surge, ao que parece pela primeira vez, no estudo das séries temporais (c.f. Jowett, G. H. 1954. Least squares regression analysis for trend-reduced time series. J. Roy. *Stat. Soc., Series* B 17, 91-104).

Esta tendência é necessário que se assinale, porque traduz, por vezes, a tentativa de esboçar tipologias baseadas em relações estruturais.

É óbvio que o uso sistemático do variograma como revelador da estrutura levanta problemas intrincados, principalmente no que respeita à escolha do seu modelo teórico.

Com efeito, esta escolha está quase sempre ligada a uma interpretação da génese e/ou metalo-génese da mineralização, etc., o que confere à análise variográfica, isto é, à aplicação prática do variograma, aspectos determinísticos exteriores, evidentemente, à metodologia das funções aleatórias, que tem sido o suporte da Geoestatística.

Contudo, esta dificuldade não surge quando o variograma é apenas usado com vista à realização da krigagem, porque neste caso o estimador correspondente é relativamente robusto, isto é, não é sensivelmente afectado pelo detalhe do modelo adoptado para o variograma.

Ainda no aspecto da análise estrutural, aparecem dificuldades relacionadas com a forma de construir o próprio variograma experimental. Na verdade, a Geoestatística parte da hipótese de se dispor de amostragem regular, *o que nem sempre acontece, como é sabido. Daí que tenha aparecido a prática de utilizar variogramas regularizados* [3] *e mesmo se comecem a usar médias ponderadas para efectuar o seu cálculo.*

Além disso, quando existe deriva, *a definição do variograma das flutuações é passiva de várias interpretações criadas com a finalidade, talvez falaz, de encontrar «objectivamente», duas coisas simultaneamente: a deriva e o variograma residual.*

Aqui também, o modelo do variograma é crucial. Todavia o problema deixou de ter a relevância tradicional que auferia na Geomatemática, graças à utilização das covariâncias generalizadas, decorrentes das funções aleatórias intrínsecas de ordem k.

2 — Entre os portugueses, a Geoestatística é aplicada pela primeira vez por J. Rogado em 1964 [17] *no cálculo da reserva de jazidas tabulares de minérios de ferro de Cassinga (Angola).*

Como seria de esperar, a utilização da metodologia da Geoestatística levantou celeuma. Todavia, este facto não impediu que se procedesse, de forma sistemática, à avaliação das reservas dos jazigos eluviais de minérios de ferro da área referida, utilizando a Geoestatística, tarefas que terminou em fins de 1966 [18].

Porém, o engrossar da celeuma levou à deslocação a Angola de G. Matheron, que confirmou a justeza do cálculo usado [1].

De passagem por Lisboa, G. Matheron efectuou uma conferência no I. S. T., da qual resultou a publicação de um artigo na revista «Técnica» [10].

Apresentava-se, assim, no foro universitário, a Geoestatística já praticada, em Portugal, por docentes do I. S. T.

Há todavia que sublinhar ter sido a necessidade objectiva de avaliar correctamente importante reserva mineral que suportava um projecto concreto, que tornou possível a inserção eficaz deste ramo de conhecimento na Universidade.

Assim, continuando as aplicações da Geoestatística, tornou-se evidente a necessidade de desenvolver a formação, neste domínio, quer de docentes e investigadores universitários, quer de engenheiros colaborando no processo industrial. Daí que, já em 1969, dois docentes do I. S. T. tenham frequentado cursos em Fontainebleau e que, nos anos seguintes, mais docentes e engenheiros continuassem com esta prática.

Durante 1970, realiza-se, no I. S. T., o primeiro curso livre de Geoestatística leccionado pelo Eng.º L. Cortez; em 1971, publica-se na «Técnica» o primeiro artigo em língua portuguesa reportando uma aplicação prática neste domínio [16] *(¹).*

Em 1971 é introduzida no «curriculum» do curso de Minas do I. S. T. a cadeira de Geoestatística, que em 1975 se desdobra em duas outras e em 1974 a A. E. I. S. T. edita o primeiro curso de Geoestatística [15].

No princípio da década de 70 funciona no Núcleo de Tratamento de Minérios do I. A. C., sediado no I. S. T., um seminário de Geoestatística, cujos colaboradores mantêm contactos frequentes com o Centro de Fontainebleau, contactos esses que têm continuado dentro do âmbito do C. V. R. M. U. T. L., herdeiro da investigação do referido Núcleo.

Simultaneamente, continuam as aplicações da Geoestatística graças à colaboração estabelecida entre o I. S. T. e a Companhia Mineira do Lobito, com minas em Angola e a J. E. N. com minas em Portugal.

Nasce, assim, a escola de Geoestatística de Lisboa que, aliás, é a primeira resultante de Fontainebleau fora da França.

(¹) De notar que em 1969 é editado texto sobre axiomática da Geoestatística [6].

A escola de Lisboa desenvolve principalmente métodos de Geoestatística mineira.

Neste domínio avultam duas linhas de desenvolvimento, na fase inicial de trabalhos do grupo de Lisboa, a saber:

(i) — A análise vario-grupal é posta em forma prática e as suas virtualidades testadas em minérios de ferro e de urânio.

Trata-se de método de análise estrutural que utiliza uma janela para escrutinizar a estrutura das mineralizações recorrendo, depois, à lógica vaga para classificar os resultados obtidos. Seguidamente, introduz uma noção de proximidade entre as estruturas assim reveladas, a qual permite, realizar tipologia e orientar problemas sequenciais de pesquisa mineira.

(ii) — A parametrização das jazidas e o seu relacionamento com as políticas de rejeição são vistos na escola de Lisboa principalmente em termos de variáveis mineralúrgicas, sugerindo o abandono do teor tal-qual como parâmetro básico de controle do projecto mineiro.

Neste domínio, desenvolve o grupo de Lisboa metodologia peculiar que permite, à custa da análise convexa, estabelecer políticas optimais de exploração e tratamento de jazidas minerais.

Partindo duma ideia inicialmente desenvolvida por R. Tillé [**24**], *constroe-se, no domínio do discreto, o convexo superior que relaciona a recuperação em metal com o rendimento em peso de concentrado* [**20, 21, 22**], *o qual tem como caso particular o convexo superior ligando o metal tal-qual com o peso do minério tal-qual extraído, que havia sido elaborado por Fontainebleau.*

Assim, a metodologia de parametrização desenvolvida em Lisboa toma em consideração aspectos do processo mineralúrgico que aquele outro convexo não pode cobrir.

Como seria natural, a Geoestatística mineira praticada pelo grupo de Lisboa influencia fortemente o Planeamento Mineiro que surge paralelamente como opção dentro do Curso de Engenharia de Minas do I. S. T.

É neste domínio que a escola de Lisboa tem ultimamente mais insistido, elaborando metodologia que permite a programação de desmontes, quer a céu-aberto, quer subterrâneos, a qual se traduz na constituição de poderosos «packages» de «software» que têm sido utilizados em aplicações concretas importantes, em jazidas nacionais e estrangeiras.

Outra preocupação da escola de Lisboa, trata-se da taxonomia automática (análise grupal, análise factorial, análise das correspondências, etc.).

Aliás, segue-se aqui a mesma tendência que se manifesta um pouco por toda a parte entre os cultores da Geociência.

Também facto que não deve ser esquecido resultante da actividade da escola de Lisboa é a recente criação, no Brasil, de um núcleo de Geoestatística, encabeçado por antigo aluno do I. S. T., o qual surgiu após regência de um curso de Geoestatística mineira na Universidade de S. Paulo, em 1976, por J. Rogado, o qual tem realizado, naquele país, trabalho de aplicação muito relevante com significativos contactos com Lisboa.

3 — A teoria da amostragem de materiais a granel de P. Gy permitiu, pela primeira vez neste domínio, satisfazer simultaneamente exigências teóricas mínimas e dar resposta eficaz em aplicações frequentemente complexas.

Entre nós, a metodologia de P. Gy tem vindo a ser utilizada e desenvolvida desde a década de 60, a nível laboratorial e industrial, nomeadamente no Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do I. S. T., no reconhecimento de jazidas tabulares de minérios de ferro de Cassinga (Angola), no controle da sua exploração e tratamento e ainda na concepção da instalação automática de amostragem do Porto de Moçâmedes.

O desenvolvimento das suas aplicações e inserção no «curriculum» duma cadeira do Curso de Minas do I. S. T. conduziu à necessidade de implementar a formação, neste domínio de investigadores universitários e de docentes colaborando na sua aplicação industrial. Daí que, logo em 1971, dois docentes do I. S. T. tenham frequentado cursos em Cannes, regidos por P. Gy.

Na década de 70 continuam a realizar-se aplicações da teoria, graças à colaboração dada à Companhia Mineira do Lobito e, ultimamente, à Comissão para o Lançamento do Programa do Aproveitamento Integrado das Pirites Alentejanas e Pirites Alentejanas E. P.

Assim, a teoria e a prática da amostragem no âmbito do modelo gizado por P. Gy, que é, aliás, uma aplicação sofisticada da Estatística, passou também a ser preocupação da Escola de Lisboa, pois o seu objecto diz respeito a variáveis regionalizadas ou a séries temporais.

4 — Em seguimento, apresentam-se a maioria das intervenções e as conferências do Seminário pela ordem por que foram dadas e espera-se que a sua publicação possa contribuir para a divulgação da Geomatemática nos países de língua portuguesa.

Faz-se notar que este Seminário teve intencionalmente carácter introdutório, pelo que, embora as contribuições nele apresentadas se situem em domínios avançados da Geomatemática, não houve a preocupação de apresentar resultados que não fossem já conhecidos ou que não estivessem publicados.

Por outro lado, também intencionalmente, incluiu-se uma conferência sobre modelos mineralúrgicos como sugestão para a construção da ponte necessária à implantação correcta das variveis mineralúrgicas nos conceitos topo-probalísticos da Geoestatística.

5 — A Comissão Organizadora do Seminário e Conferências de Geomatemática agradece calorosamente a contribuição dos autores nacionais e estrangeiros que vieram enriquecer, quer o Seminário, quer as Conferências.

Também a Comissão Organizadora deseja expressar o seu agradecimento aos participantes nacionais e estrangeiros, nomeadamente aos docentes da Faculdade de Ciências da U. L. e da Faculdade de Ciências e Tecnologia da U. C. e aos colaboradores da Direcção-Geral de Minas, do Serviço de Fomento Mineiro, da Junta de Energia Nuclear, do C. P. R. M. e I. P. T. do Brasil e das empresas Paulo Abib Engenharia S/A do Brasil, Ferrominas E. P., Pirites Alentejanas E. P. e Mineira de Santiago, S. A. R. L. cuja presença interessada e actuante foi a maior compensação para os esforços realizados na organização deste Seminário e Conferências.

O Laboratório Nacional de Engenharia Civil e a Sociedade Portuguesa Time-sharing S. A. R. L. são merecedoras do nosso reconhecimento pelas facilidades de cálculo automático postas à disposição do Seminário.

Uma palavra de apreço e agradecimento deseja ainda a Comissão Organizadora endereçar aos alunos do 5.º ano do Curso de Engenharia de Minas de então e aos colaboradores do C. V. R. M. U. L. e do Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do I. S. T. e bem assim a todos os que actuaram na dactilografia e pre-impressão dos trabalhos, sem os quais teria sido impossível levar àvante o Seminário e Conferências.

Em especial, a Comissão Organizadora deseja manifestar a sua gratidão ao Eng.º Fernando Soares Carneiro, Director-Geral de Minas pelo apoio concedido e, bem assim, por ter participado nos trabalhos do Seminário na sessão de abertura.

Particular reconhecimento quere ainda a Comissão Organizadora manifestar à Presidência do I. N. I. C. pelos fundos concedidos, quer para a organização do Seminário, quer para ajuda da edição que agora se efectua.

J. QUINTINO ROGADO

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] — **Cortez, L. P.** 1967. Relatório da viagem às minas de Cassinga com o Dr. Georges Matheron. R. I. de C.ª Mineira do Lobito.

[2] — **Cortez, L. P., Muge, F. O.** e **Pereira, G. P.** 1974. Voriogroupal Analysis, 12 th APCON. Denver — Colorado.

[3] — **David, M.** e **Blaist, R. A.**, 1972. 9th APCON, Johannsburg.

[4] — **Delfiner, P.**, 1975. Linear estimation of non stationary spatial phenomena, NATO A. S. I., Advanced

[5] — **Journel, A.** 1974. Simulations conditionnelles. Thorie et pratique. Tese. Paris.

[6] — **Madureira, C. M. N.**, 1969. Sobre uma nova axiomática da geoestatística, *Revista da Faculdade de Engenharia*, XXXIV — 1, Porto, Portugal.

[7] — **Matheron, G.**, 1962. Traité de Geoestatistique Appliqué, Ed. Technip, Paris. Tomo I, 1962; Tomo II, 1963.

[8] — **Matheron, G.**, 1965. Les variables régionalisées et leur estimation, Ed. Masson et Ci, Paris.
geoestatics in the mining industry, Ed. M. Guarascio, M. David e C. Huijbregts; Dordreht — Holanda/ /Boston — U. S. A.

[9] — **Matheron, G.**, 1967. Éléments pour une théorie des milleux poreux, Ed. Masson & Cie, Paris.

[10] — **Matheron, G.**, 1967. *Técnica* 368, Lisboa. Portugal.

[11] — **Matheron, G.**, 1969. Le krigeage universel, *Les Cahiers da Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau*, Ed. E. N. S. M. P., Paris; Fascículo 1.

[12] — **Matheron, G.**, 1973. The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied Probability*, N.º 5.
[13] — **Matheron, G.**, 1975. Rundon sets & integral geometry, John Willey & Sons, New York.
[14] — **Matheron, G.**, 1975. Les concepts de base et l'evolution de la geoestatistique minière, NATO A. S. I., Advanced geostatistics in the mining indusdry. Ed. M. Guarascio, M. David e C. Huijbregts; Dordreht — Holanda/Boston/U. S. A.
[15] — **Muge, F. O., Cortez, L. P.** e **Pereira, H. G.**, 1974. Apontamentos de Geoestatistica. A. E. I. S. T. Lisboa, Portugal.
[16] — **Pereira, H. G.**, 1971. Aplicações da groestatistica, «Técnica» 407. Lisboa, Portugal.
[17] — **Rogado, J. Q.**, 1964. Reserva de minério secundário de ferro de Cassinga (Setembro, 1964). Rel. Int. C. M. L., Lisboa, Portugal.
[18] — **Rogado, J. Q. e Cortez, L. P.**, 1967. Avaliação da reserva de minério de ferro da área de Cassinga (31-12-66). Rel. Int. C. M. L., Lisboa, Portugal.
[20] — **Rogado, J. Q.**, 1974. An optimization method for the mining and beneficiation of ore blocks. 13 th APCON. Denver — Colorado.
[21] — **Rogado, J. Q.**, 1978. Optimização do beneficiamento de sistemas de jazidas minerais. «Técnica» 445/446. Lisboa.
[22] — **Rogado, J. Q.**, 1978. The global parametrization of sets of several different ore deposits 8.º PRIBRAM
[23] — **Serra, J.**, 1969. Introduction a là morphologie mathématique, *Les Cahiers da Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau*, Ed. E. N. S. M. P., Paris; Fascículo 3.
[24] — **Tillé, R.**, 1971. Études des conditions de concentration qui conduissent à une exploitation optimale d'un ensemble de gisements miniers. Comunicação privada.

LISTA DE PARTICIPANTES DO SEMINÁRIO DE GEOMATEMÁTICA

AFONSO, António Geofísico	Centro de Geofísica das Universidades de Lisboa R. da Escola Politécnica, 58 LISBOA
ALMEIDA, Rogério Estudante — 1977.	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
BASTOS, Maria Helena Eng.ª Química	Departamento de Metalurgia do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
BAPTISTA, Santiago Eng.º de Minas	Ferrominas, E. P. Av. Sidónio Pais, 2-4.º LISBOA
BEATO, Maria de Fátima Geóloga	Serviços Geológicos de Portugal R. da Academia de Ciências, 19-2.º LISBOA
BORGES, António Estudante — 1977.	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
CALDEIRA, Luís Eng.º de Minas	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA

CARNEIRO, Carlos Eng.º de Minas	Departamento de Metalurgia do I. S. T. CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
CARVALHO, Delfim Geólogo	Serviço de Fomento Mineiro R. Dr. Freire Amador Arrais BEJA
CAXARIA, Carlos Estudante — 1977.	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
CONDE, Luís Eduardo Geólogo	Sociedade Mineira de Santiago, SARL Rua 5 de Outubro, 53 ALJUSTREL
CORTEZ, Leopoldo Eng.º de Minas	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
COSTA, J. F. Beja Eng.º de Minas	Pirites Alentejanas, SARL ALJUSTREL
DANIEL, Fernando Eng.º de Minas	Pirites Alentejanas, SARL ALJUSTREL
DIAS, Alveirinho Geólogo	Serviço de Fomento Mineiro R. António Enes, 7 LISBOA
DIAS, Isidro Filipe Eng.º de Minas	Pirites Alentejanas, SARL ALJUSTREL
DOWD, Peter A. Research Fellow	Department of Mining and Mineral Sciences The University of Leeds LONDRES
DUQUE, Vítor Manuel Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
DURÃO, Fernando Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
FELICIO, Fernando Estudante (1977)	Universidade de Coimbra — F. C. T. Departamento de Minas COIMBRA
FERREIRA, Armindo G. Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
FRANCO, Aldredo A. Eng.º de Minas	

GIRODO, A. Carlos Eng.º de Minas	P. A. A. — P. Abib Andery S. A. BELO HORIZONTE EIM — Engenharia para Indústria Mineral, S. A. S. PAULO — BRASIL
GUIBAL, M. D. Ingénieur de Recherches	ENSMP — École National e Supérieur des Mines de Paris Centre de Geostatistique 35 Rue de Saint Honoré 77305 Fontainebleau FRANÇA
LEITE, Maria Fernanda Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
LIMA, Luis Manuel Pedroso de Estudante (1977)	Universidade de Coimbra — F. C. T. Departamento de Minas COIMBRA
LOPES, Carlos Filipe Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
LOURENÇO, Carlos Eng.º de Minas	
MARQUES, João Carvalho Eng.º de Minas	Departamento de Tratamento de Minérios e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
MARTINS, José de Jesus Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
MIRANDA, António João Eng.º de Minas	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
MONTEIRO, José H. Geólogo	Serviço de Fomento Mineiro R. António Enes, 7 LISBOA
MOREIRA, José Carlos Geólogo	Serviço de Fomento Mineiro R. António Enes, 7 LISBOA
MUGE, Fernando Eng.º de Minas	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
NAIQUE, Ramachondra Eng.º de Minas	Ferrominas, E. P. Av. Sidónio Pais, 2-4.º LISBOA

OBLAD, Alex A. Eng.º Metalúrgico	P. A. A. — P. Abib Andery S. A. BELO HORIZONTE EIM — Eng.ª para a Indústria Mineral S. A. S. PAULO — BRASIL
OLIVEIRA, José Carlos Estudante — 1977.	Faculdade de Ciências de Lisboa R. da Escola Politécnica LISBOA
OLIVEIRA, José Manuel Geólogo	Serviço de Fomento Mineiro R. Dr. Freire Amador Arrais BEJA
PAIONE, José Aloisio Eng.º de Minas	CPRM — Centro de Pesquisa de Recursos Minerais Av. Pasteur, 404 Rio de Janeiro BRASIL
PEREIRA, Santana Eng.º de Minas	
PEREIRA, H. Garcia Engº de Minas	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
POSSOLO, António Manuel Geólogo	Centro de Geologia das Universidades de Lisboa R. da Escola Politécnica LISBOA
QUARESMA, Vítor Manuel Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
REMÍSIO, Luís H. Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
REYNAUD, Rui Amadeu Eng.º de Minas	Serviço de Fomento Mineiro R. António Enes, 7 LISBOA
RIBEIRO, Luís Filipe Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
ROGADO, José Luís Eng.º Electrotécnico	CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA
ROGADO, José Quintino Prof. Catedrático	Departamento de Mineralurgia e Planeamento Mineiro do Instituto Superior Técnico CVRMUL — Centro de Valorização de Recursos Minerais das Universidades de Lisboa Av. Rovisco Pais LISBOA

ROQUETE, Maria João	LNEC — Laboratório Nacional de Engenharia Civil Av. do Brasil LISBOA
SANTOS, Heitor Eng.º de Minas	Faculdade de Ciências e Tecnologia Dep. Eng.ª de Minas Universidade de Coimbra COIMBRA
SANTOS, Nuno Eng.º de Minas	Junta de Energia Nuclear Minas da Urgeiriça Canas de Senhorim URGEIRIÇA
SILVA, Carlos Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
SILVA, Júlio Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
SILVA, Lúcio Eng.º de Minas	Sociedade Mineira de Santiago, SARL R. 5 de Outubro, 53 ALJUSTREL
SILVA, M. Nolasco Eng.º de Minas	Serviço de Fomento Mineiro R. Dr. Freire Amador Arrais BEJA
SOARES, Amílcar Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
SOBRAL, Fernando Eng.º de Minas	Dep.º Eng.ª de Minas da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra COIMBRA
SOUSA, Jorge Eng.º de Minas	
SUSLICK, Saul Engenheiro	I. P. T. — Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de S. Paulo S. Paulo BRASIL
TEIXEIA, Luís Alberto Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA
VALENTE, Jorge Manuel Eng.º de Minas	PAA — Paulo Abib Engenharia S. Paulo BRASIL
VIEIRA, Fernando Estudante (1977)	Instituto Superior Técnico Av. Rovisco Pais LISBOA

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.24/25/27/28:622.1:550

Introdução às variáveis regionalizadas

HENRIQUE GARCIA PEREIRA
Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico (CVRMUL)

RESUMO

Introduz-se a noção de Variável Regionalizada no seu duplo aspecto aleatório e estrutural. Dão-se exemplos de Variáveis Regionalizadas nos domínios geológico e mineiro e sugere-se, em Referências Bibliográficas existentes no CVRMUL, outras aplicações. Interpretam-se as Variáveis Regionalizadas como realização de uma Função Aleatória e introduzem-se hipóteses restritivas. Define-se o variograma como instrumento básico da Geoestatística e estudam-se algumas das suas propriedades como revelador de estruturas.

Indica-se o método de cálculo do variograma experimental e listam-se alguns modelos teóricos ajustáveis.

ABSTRACT

The theory of Regionalized Variables is introduced by its structural and random features. Examples of the variables in the geological and mining fields are presented and other applications are suggested. The Regionalized Variables are studied as a realization of Random Functions and work hypothesis are introduced. The variogram is definned as the basic tool of Geostatistics and some of its applications as structure depictor are discussed.

The method for experimental variogram calculation is described and some theoretical models are adjusted.

ÍNDICE

1. GENERALIDADES

2. AS VARIAVEIS REGIONALIZADAS COMO REALIZAÇAO DE UMA FUNÇÃO ALEATORIA

3. HIPOTESES RESTRITIVAS

4. VARIOGRAMA

   4.1. Introdução
   4.2. Fenómenos de transicão
   4.3. Anisotropias
   4.4. Comportamento na origem
   4.5. Construção do variograma experimental
   4.6. Ajustamento de um modelo teórico

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1 — GENERALIDADES

Nas Ciências da Terra surge um tipo de variáveis distribuidas no espaço e que apresentam uma certa estrutura.

Se for x a coordenada (*) do ponto do espaço a que se refere a variável, Y(x) designa o valor que a variável toma nesse ponto.

Por exemplo, o teor ao longo de uma sondagem é uma Variável Regionalizada (V. R.).

Estas variáveis apresentam-se segundo um duplo aspecto contraditório: têm uma característica *aleatória* que se manifesta na irregularidade e variação imprevisível de um ponto para outro e uma característica *estruturada* que reflecte as ligações existentes entre os pontos do espaço onde o fenómeno mineralizado ocorreu.

As variáveis regionalizadas não podem ser tratadas pela estatística clássica (Bernoulliana) visto que esta implica que:

1. As provas possam ser indefinidamente repetidas

2. As provas são independentes (o resultado de uma prova não pode ser influenciado pelo das que a precederam).

Ora estas condições não são respeitadas nas variáveis tratadas nas Ciências da Terra: tirando uma amostra num ponto de coordenada x, o teor de tal

(*) Em tudo o que se segue, x é a coordenada a 1, 2 ou 3 dimensões.

amostra é um valor *único*, fisicamente determinado, e não é possível voltar a repetir a experiência. No entanto, se tirarmos outra amostra num ponto infinitamente vizinho, poder-se-ia dizer que a condição 1. era respeitada numa certa vizinhança, mas a condição 2. deixava de o ser, visto que, se a primeira amostra fosse tirada numa zona rica, havia tendência, em média, para que a segunda tivesse também um teor elevado.

Por outro lado, um aspecto fundamental das V. R. que é a *continuidade* do fenómeno mineralizado, isto é, o modo mais ou menos regular como estas evoluem no espaço, não pode ser tomada em conta pela estatística clássica.

De facto, consideremos o seguinte exemplo de amostras de solo retiradas ao longo de 2 linhas a intervalos regulares e suponhamos que a variável que nos interessava era a percentagem de água nessas amostras. Os resultados são indicados na tabela seguinte:

linha A	5	10	15	20	25	20	15	10	5
linha B	10	25	15	10	20	5	15	5	20

Do ponto de vista da estatística clássica, as amostras tiradas na linha A não diferem das tiradas na linha B — têm a mesma média, variância, momentos de ordem superior, histograma, etc. No entanto, do ponto de vista da distribuição do teor da água no solo é intuitivo que as duas sequências são profundamente diferentes e portanto há um carácter nas V. R. que tem de ser tomado em conta através de outra ferramenta que não a estatística clássica.

Algumas características qualitativas das variáveis regionalizadas são comentadas seguidamente:

a) **Localização** — a V. R. está definida numa determinada região do espaço à qual se chama *campo geométrico* que pode ser uma formação geológica, por exemplo, um jazigo em que as variáveis têm um conjunto de ligações entre elas dado pela própria génese (fenómeno estruturante). Mas na prática a V. R. não é uma função pontual — é o valor médio numa amostra de dimensões finitas, perfeitamente determinadas. O domínio onde a V. R. é medida designa-se por *suporte*. Para um teor, por exemplo, o suporte é o volume da amostra onde este foi analisado. Se se muda o suporte, obtém-se outra regionalização diferente da primeira até do ponto de vista da estatística clássica. O histograma das carottes de sondagem apresentará sempre dispersão maior (maior variância) do que o histograma de blocos de algumas toneladas (Fig. 1).

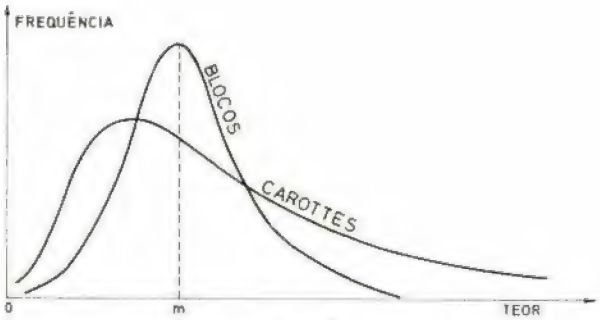
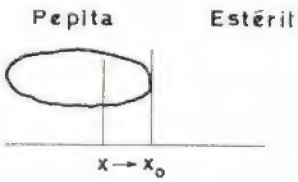


Fig. 1

b) **Continuidade** — é a variação espacial da V. R. Apesar da complexidade das flutuações verificadas existe em geral continuidade em média. Esta define-se por

$$\lim_{x \to x_0} E\{Y(x) - Y(x_0)\} = 0$$

Há casos em que tal continuidade não se verifica e então o limite $C_0 \neq 0$ para o qual tende a diferença dos quadrados da variável quando os pontos se aproximam indefinidamente é o chamado *efeito de pepita*. De facto, na fronteira de uma pepita existe descontinuidade:



$$\lim_{x \to x_0} [Y(x) - Y(x_0)]^2 = C_0 \neq 0$$

c) — **Anisotropias** — em certos casos, ligados a fenómenos geológicos particulares, a continuidade numa determinada direcção pode ser diferente da que se verifica noutra direcção. Ao longo de uma mesma camada sedimentar é de esperar uma variação muito mais regular do que na direcção perpendicular.

d) **Fenómenos de transição** — No interior do campo geométrico da variável, podem surgir estruturas particulares como sejam conjuntos lenticulares em que existe continuidade no interior de cada unidade e variação brusca de unidade para unidade (Fig. 2).

Este conjunto complexo de descontinuidades realiza uma partição do espaço mineralizado em compartimentos mais ou menos independentes (*). É de es-

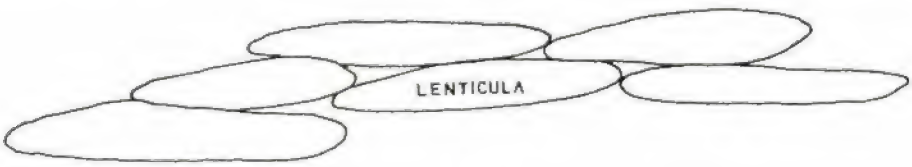


Fig. 2

(*) Corresponde, por exemplo, a micro-bacias de sedimentação onde as condições de deposição evoluiram de um modo mais ou menos autónomo.

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

ESPECIALISTA DESDE 1947

sopecate

ESTUDOS
GEOTÉCNICOS

FUNDAÇÕES
ESPECIAIS

RUA DO ARSENAL, 146-2º
TELFS. 320208 · 360437 · 364010
LISBOA

Ventilação
de Edifícios

Ventilação Térmica FÉRIA
(tipo shunt)

ECONOMIA E EFICÁCIA!

Com aprovação do
Laboratório Nacional
de Engenharia Civil
Câmara Municipal de Lisboa
Batalhão de Sapadores
Bombeiros
Direcção-Geral de Saúde

Exija o documento
de viabilização do LNEC
e a aprovação da CML

Consulte o Art.º 17 do R. Geral
das Edificações Urbanas

Viver
é Respirar!

FÉRIA SERIC
Rua S. Sebastião da
Pedreira 108 1.º
Tels 54 93 81 · 57 69 77
Consulte o nosso
Gabinete Técnico

SONDAGENS
Geológicas
Mineiras
Geotérmicas
De Captação de águas

FUNDAÇÕES

TRABALHOS MINEIROS
Abertura de poços e galerias
Injecções

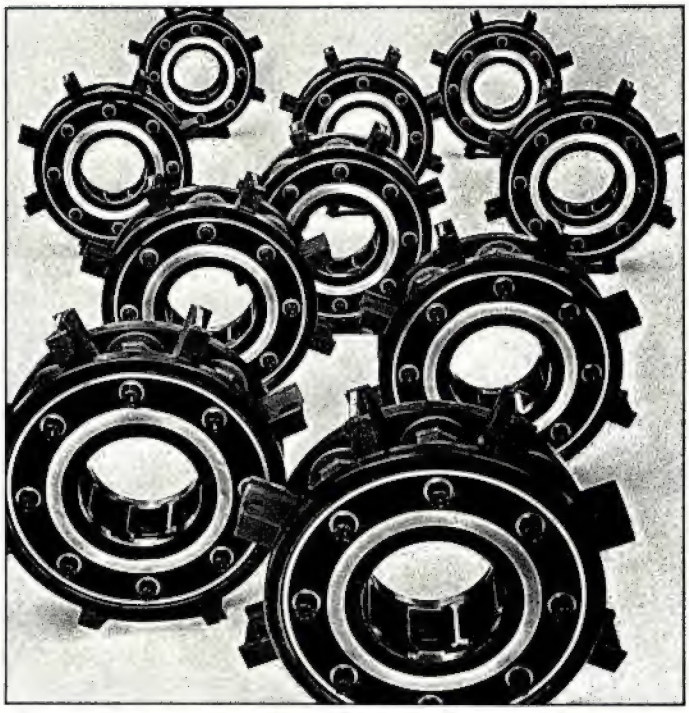
CONGELAÇÃO DE SOLOS
Para trabalhos mineiros
e de construção civil

R. Cruz da Carreira, 6, 3.º
Tel. 52797
Lisboa 1

foraky

Mais do que um milhão de HP na Europa

mas, nem um HP a mais!



A potência de todas as turbinas montadas nas máquinas **+GF+** de decapagem a jacto de grenalha ultrapassou o primeiro milhão de HP, o que é muito, mas, não é demais a energia economizada pela força centrífuga desse mesmo jacto.
No entanto, o proveito obtido, em relação às superfícies racionalmente limpas de metal, plástico ou borracha contam mais de que os valores em HP.
Seria bom se fosse possível medir, pelo menos, um proveito adicional, a saber: a defesa do ambiente.
A decapagem **+GF+** por jacto centrífugo favorece o referido ambiente.
Sobre este ponto os interessados devem falar com os nossos especialistas.

+GF+

Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)

Representante: Sociedade Comercial Romar, Lda., Rua da Boavista, 83-1° Dto, LISBOA - 2 -
Telefone: 603131 – Telex 12698 romar p

SM 1024/5

perar que o sistema de relações entre a V. R. no interior de cada lenticula seja mais «forte» do que quando se passa de uma para outra. Esta estrutura que conduz a que, a partir de uma certa distância, haja independência entre as V. R., é designada por Fenómeno de Transição.

***

A teoria das Variáveis Regionalizadas foi desenvolvida a partir dos trabalhos de **Matheron** [1], [2].

A aplicação desta teoria a problemas mineiros, em especial cálculo de reservas e planeamento da exploração, designa-se por Geoestatística.

Um resumo do formalismo e campos de aplicação da Geoestatística encontram-se em [3], [4], [5], [6] que constituem guias práticos de utilidade para um primeiro aproach dos problemas levantados pela aplicacão da teoria das Variáveis Regionalizadas no domínio mineiro.

Considerações gerais sobre a utilidade da Geoestatística do ponto de vista da empresa mineira (utilização como instrumento de decisão económica) encontram-se brevemente explanadas em [7], [8], [9] e [10].

Como exemplo de Variáveis Regionalizadas, teremos, como primeiro caso clássico, o *teor* num determinado elemento numa amostra localizada no espaço de coordenada x. De facto, o teor apresenta uma evolução errática de ponto para ponto do espaço, mas será de esperar que teores em pontos vizinhos tenham mais relação entre si do que teores em pontos muito afastados. Ao aspecto aleatório, sobrepõe-se a estrutura do fenómeno mineralizado que dá uma certa unidade ao conjunto de variáveis medidas no campo geométrico que é a jazida.

A *possança* mineralizada é também uma V. R.

Variáveis de tratamento como *rendimentos* são também V. R. pois a aptidão ao tratamento depende de características intrínsecas do minério que se desenvolvem no espaço de uma certa maneira, dependente do fenómeno mineralizado.

Além destas variáveis «mineiras» (cuja aplicação no cálculo de reservas é imediata) existem muitas outras que podem ser tratadas como V. R.

Por exemplo, o *estado de fracturação de um mármore,* definido como a superfície total de fracturas por unidade de volume é objecto de um tratamento geoestatístico em [11].

Na *prospecção geoquímica,* a dimensão e variabilidade das amostras colhidas para estudar a distribuição de determinado elemento no espaço (homogeneidade, dispersão, anisotropias, técnicas de amostragem e «mapping») são aplicações típicas da teoria das V. R. [12].

Em *hidrogeologia* e *pluviometria,* a altura piezométrica num determinado ponto de um aquífero ou a quantidade de precipitação que cai num determinado ponto de medida podem ser tomadas também como V. R. [13], [14].

Em geofísica, em particular na interpretacão de dados *gravimétricos* [15], mas também em *meteorologia,* em que se pretende tomar em conta a relação entre a pressão e a velocidade dos ventos [14], a teoria das V. R. tem-se revelado como instrumento poderoso de interpretação e previsão.

A determinação de cartas dos *fundos submarinos* é também um caso em que a cota medida num determinado ponto pode ser tomada como V. R. [14].

Em problemas de controle da poluição [16] e outros um pouco fora do âmbito deste trabalho (densidade de árvores numa floresta, distribuição geográfica da população e actividades económicas) também a teoria da V. R. pode ter aplicação útil.

EM RESUMO, qualquer variável dependente do espaço, em que, para além de um carácter aleatório, existe um sistema de relações entre os valores tomados em pontos distanciados de um vector $\vec{h}$ *(e esse sistema de relações não pode ser interpretado de um modo simples a partir de uma função que descreva uma realidade «física») pode ser tratada como Variável Regionalizada e sofrer uma análise segundo o formalismo desenvolvido pela Geoestatística.*

2 — AS VARIÁVEIS REGIONALIZADAS COMO REALIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO ALEATÓRIA

Para interpretar o duplo aspecto aleatório e estrutural das V. R. utiliza-se a noção de Função Aleateória (F. A.).

Uma F. A. é uma variável aleatória a uma infinidade de componentes.

Sejam $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ as coordenadas dos pontos do espaço onde se realizam medidas das V. R. Os valores $Y(x_1)$, $Y(x_2)$, ..., $Y(x_n)$ — valores que a V. R. toma nesses pontos — podem considerar-se como uma realização particular de uma F. A. a *n* componentes, isto é, como *um* dos resultados possíveis de uma tiragem à sorte da F. A. Se fosse possível repetir a experiência, obter-se-ia outras realizacões da mesma F. A. cuja lei de distribuição de probabilidade a *n* componentes seria $f[Y(x_1), Y(x_2), \ldots\ldots, Y(x_n)]$.

Como a partir de uma única realização de uma variável aleatória ordinária (um número tirado ao acaso) não é possível inferir a lei de distribuição dessa variável, também aqui a lei de ditribuição de probabilidade a *n* componentes não se pode determinar.

Exige-se assim a introdução de hipóteses restritivas.

4 — HIPÓTESES RESTRITIVAS

Para ultrapassar a dificuldade acima enunciada podem formular-se algumas hipóteses restritivas.

a) Estacionaridade — A F. A. é estacionária se a sua lei de distribuição de probabilidade é invariante por translacção, isto é a F. A.

$[Y(x_1), Y(x_2), \ldots\ldots, Y(x_n)]$ tem a mesma lei de distribuição de probabilidade do que

$$[Y(x_1+h), Y(x_2+h), \ldots\ldots, Y(x_n+h)]$$

neste caso $E\{Y(x)\}=m(x)=E\{Y(x+h)=m=c^{te}$ portanto a média é invariante por translacção e pode ser tomada como nula.

b) Estacionaridade de 2.ª ordem.

Se a covariância

$$K(h)=E\{Y(x+h).\ Y(x)\}-m(x)^2$$

não depende de x (isto é, do ponto de apoio) e só da distância que liga os dois pontos entre os quais é calculada, diz-se que há estacionaridade de 2.ª ordem.

Esta hipótese implica a existência da variância

$$K(o)=E\{Y(x)^2\}-m(x)^2$$

finita, o que nem sempde se verifica (*).

c) Hipótese intrínseca.

Consideremos os incrementos $[Y(x+h)-Y(x)]$ e admitamos que estes são estacionários, isto é, não dependem de x.

Então

$E\{[Y(x+h)-Y(x)]\}=m(h)$ deriva linear (que se pode supor nula)

$E\{[Y(x+h)-Y(x)]^2\}=2\ \gamma(h)$ variograma

No caso da hipótese intrínseca, o variograma $\gamma(h)$ é independente do ponto de apoio e portanto é suficiente para definir a estrutura da V. R. no espaço em que a estacionaridade se verifique.

Estas hipóteses *a*), *b*) e *c*) são sucessivamente mais fracas e devem ser testadas para investigar se num determinado campo se verificam. É esta precisamente a dificuldade inicial do técnico de geoestatística aplicada — determinação de um variograma único para todo o espaço que pretende tratar (ou a partição do espaço em zonas em que a estacionaridade, tal como se definiu para a hipótese intrínseca, seja válida).

De facto, para que o fenómeno geológico admita a hipótese intrínseca, é necessário que o sistema de correlacões entre pontos do espaço só dependa da distância e não da zona de trabalho (medida pela coordenada x). Isto implica que o fenómeno geológico tenha agido de um modo «aproximadamente» constante para a zona onde se pretende estimar o variograma e que a *escala* da rede de amostragem «acerte» com a escala em que o fenómeno revela a estacionaridade (*).

Mas há fenómenos que, seja qual for a escala de trabalho, nunca apresentam estacionaridade. Um fenómeno governado pela gravidade (o teor aumenta sempre em profundidade, por exemplo) não pode evidentemente sofrer o tratamento da geoestatística estacionária. Para tais casos, a Krigagem Universal [18] é a metodologia a utilizar. Vamos no entanto cingir-nos, neste trabalho, ao caso em que a estacionaridade, mesmo local, pode ser detectada.

4 — VARIOGRAMA

4.1 — Introdução

O variograma é o instrumento básico da geoestatística. É a partir desta função que todas as estimações são efectuadas e afectadas de um erro. Por outro lado, é um poderoso revelador de estruturas. É neste último aspecto que o variograma vai ser considerado neste trabalho.

Num determinado campo geométrico, consideremos o valor que a variável regionalizada toma em dois pontos x e $x+\vec{h}$, onde $\vec{h}$ é um vector.

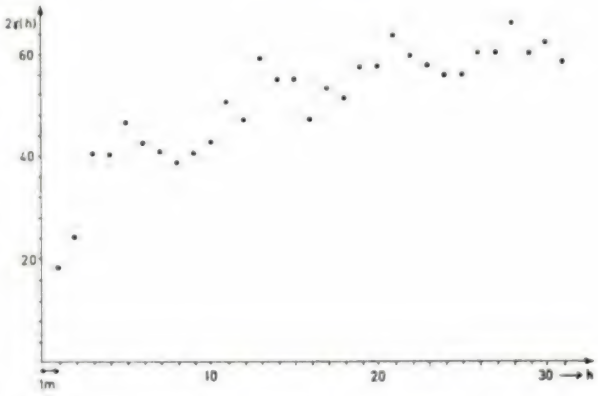
Na hipótese intrínseca, o variograma não depende do ponto de apoio e pode ser calculado para qualquer região do espaço.

É portanto o valor médio do quadrado das diferenças entre todos os pares de pontos existentes no campo geométrico distanciados de $\vec{h}$.

Na prática, é necessário que o número de pontos amostrados seja suficiente para que a *média* tenha significado estatístico.

4.2 — Fenómenos de transição

O variograma, nos fenómenos de transição, apresenta-se com o aspecto da figura seguinte (variograma do teor em Cu num jazigo sedimentar):



Variograma dos teores em Cu (segundo [19])

(*) Um estudo experimental realizado por **Krige** [9], [17] verificou que a variância de uma amostra num campo sucessivamente crescente (até atingir todo o jazigo do Rand), aumentava indefinidamente segundo $\sigma^2(v/v)=\alpha \log (v/v)$ e portanto não há garantia de que exista variância à priori finita. Sendo v a dimensão da amostra e v a dimensão do campo onde a variância $\sigma^2(v/v)$ é calculada, verifica-se que $\lim_{v\to\infty} \sigma^2(v/v)=\infty$.

(*) É neste aspecto que a informação geológica é muito útil na formulação dos modelos geoestatísticos. A interdependência entre as observações de campo e o tratamento matemático deve ser constante.

Na maioria dos casos práticos, há um ramo crescente do variograma para valores pequenos de $\vec{h}$ e a partir de uma certa distância, este tende para um patamar. Este facto é interpretado teoricamente a partir da estacionaridade de 2.ª ordem:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left\{ \left[Y(x+h) - Y(x)\right]^2 \right\}$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left\{\left[Y(x+h)\right]^2\right\} - E\left\{Y(x+h).\,Y(x)\right\} + \frac{1}{2} E\left\{\left[Y(x)\right]^2\right\}$$

em virtude da estacionaridade de 2.ª ordem,

$$E\{[Y(x+h)]^2\} = E\{[Y(x)]^2\} = K(o)$$

$$\gamma(h) = K(o) - K(h)$$

Nos fenómenos de transição, a partir de uma certa distância *a*, dita *amplitude*, a covariância K(h) anula-se e o variograma reduz-se ao patamar C que coincide portanto com a variância à priori.

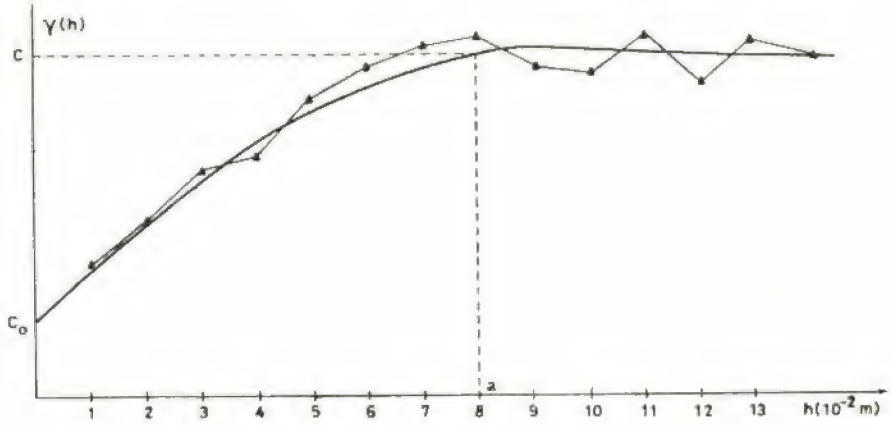
Outro parâmetro característico do variograma é o *efeito de pepita* C_o que corresponde à ordenada na origem.

É o caso que se apresenta na figura seguinte, correspondente às espessuras mineralizadas de um jazigo sedimentar de Ferro:

O variograma A foi construído a partir de amostras cuja distância mínima era 1. Se for apertada a malha de amostragem, poder-se-ia revelar o variograma B que corresponde à sobreposição de uma transição a pequena escala (com o seu patamar) com a transição à escala da 1.ª amostragem. Além deste aspecto («testemunho» de microregionalização), o efeito de pepita reflecte ainda os erros de amostragem. De facto, se fosse possível realizar a colheita de outra amostra no mesmo ponto x, essa amostra daria um valor para a V. R. Y' diferente do inicial devido aos erros de amostragem, analíticos, etc. Portanto, duas amostras infinitamente próximas podem contribuir para o termo $[Y(x+h)-Y(x)]^2$ apenas pelos erros de amostragem.

Outro aspecto importante da mineralização revelado pelo variograma é a presença de *estruturas embricadas* e corresponde ao caso ilustrado na Fig. 5 para o variograma global da acumulação (teor x espessura) de um jazigo de Au.

Este caso corresponde ao facto de a malha de reconhecimento utilizada ter «surpreendido» simultaneamente duas estruturas de transição embricadas segundo o esquema da Fig. 4:



O efeito de pepita pode ser interpretado como o «testemunho» de micro-regionalizações existentes a escalas inferiores à de amostragem. De facto, o primeiro ponto a que temos acesso experimental é γ(1) e não se sabe o andamento do variograma entre os pontos 0 e 1; apenas se pode extrapolar linearmente para o eixo das ordenadas.

Suponhamos o caso ilustrado na Fig. 3.

Fig. 4

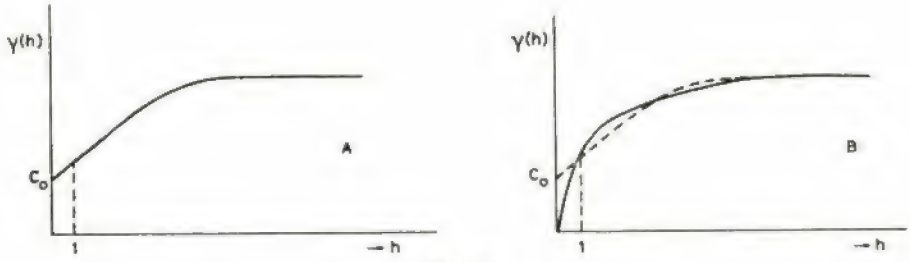


Fig. 3

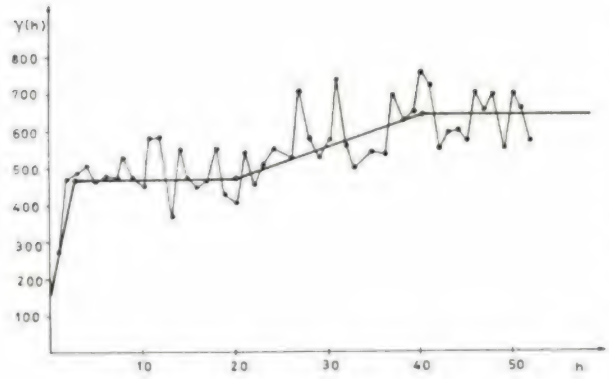


Fig. 5

O problema da escala encontra-se aqui de novo: para pequenas distâncias, o variograma reflecte a transicão a essa escala (no interior das lentículas) e para distâncias superiores à dimensão média das lentículas, o variograma reflecte o modo como estas se estruturam entre si.

Em resumo, num fenómeno de transição, os parâmetros de que depende o variograma são:

a — amplitude — a distância a partir do qual as amostras se tornam independentes (corresponde à noção intuitiva de «zona de influência» de uma amostra).

C — patamar — é a variância à priori da V. R. estudada e reflecte a «dispersão» própria do fenómeno mineralizado para distâncias superiores à amplitude.

C_0 — efeito de pepita — é a ordenada na origem do variograma e resulta da sobreposição de microestruturas e de erros de amostragem.

4.3 — Anisotropias

Visto que o variograma depende da direcção em que é calculado, podem surgir andamentos diferentes conforme a direcção. É este aspecto do variograma como revelador de anisotropia que dá a informação sobre a variação das estruturas presentes com a direcção.

Na Fig. 6 está esquematizada uma anisotropia que se verifica numa jazida de fosfatos.

Num jazigo estratiforme é de esperar que o variograma calculado no sentido da estratificação seja muito diferente (maior amplitude) do que o variograma calculado na direcção perpendicular em que a independência entre amostras estará ligada à espessura média dos estratos.

No caso dos parametros C_0 e C (bem como o andamento do ramo ascendente) se manterem e só variar a amplitude *a*, trata-se de uma anisotropia geométrica que é possível «desfazer» através de uma mudança adequada da escala de distâncias que «reproduza» o esquema isótropo.

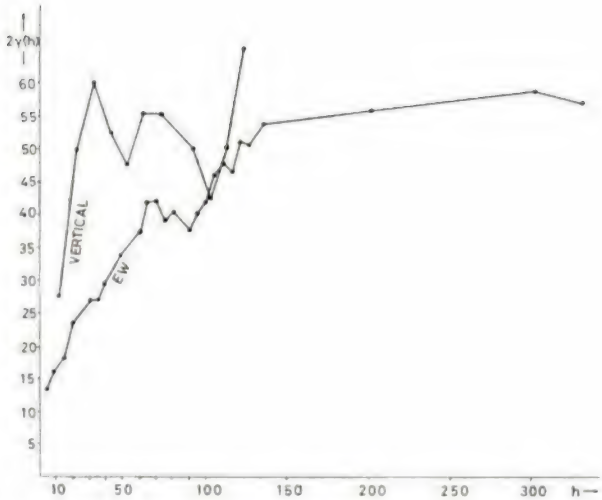
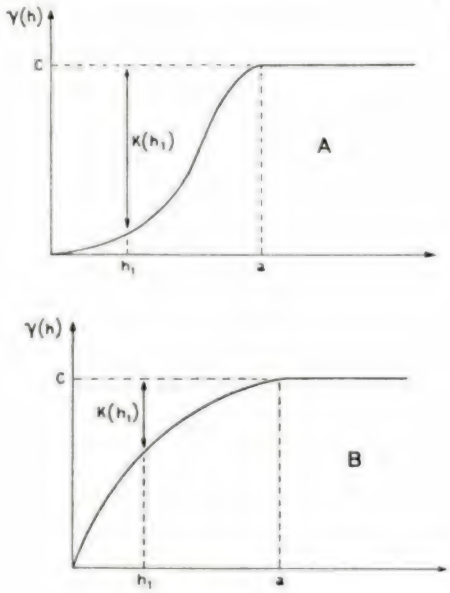


Fig. 6

4.4 — Comportamento na origem

Para além do caso em que o variograma se reduz a flutuações em torno de um patamar (o que significa que, à escala de trabalho, não foi possível encontrar a estrutura de relações entre a V. R.), há a considerar dois tipos fundamentais de comportamento do variograma na vizinhança da origem, que estão ilustrados na figura seguinte:



No caso A, diz-se que há comportamento parabólico na origem e verifica-se que a covariância, medida pela grandeza $K(h_1)$ para uma certa distância h_1, é superior à que se observa, para a mesma distância, no caso B (comportamento linear).

Então, um variograma com comportamento parabólico corresponde a uma variável mais regular no espaço do que um variograma com comporta-

mento linear. A covariância dissipa-se mais rapidamente no caso B para as pequenas distâncias, embora a amplitude possa ser a mesma. O caso A corresponde a uma variável como as espessuras de uma camada sedimentar, enquanto B corresponde aos teores de um elemento num suporte constante.

4.5 — Construção do variograma experimental

Perante os dados experimentais de que se dispõe, a primeira tarefa que é necessário sempre efectuar é uma crítica cuidadosa do modo como a amostragem foi efectuada. Esta crítica exige uma definição correcta da V. R. que se pretende estudar, o seu suporte e a sua distribuição «macroscópica» no espaço (possibilidade de «viés» por concentração de dados numa certa zona, exame de valores aberrantes, homogeneidade dos dados (*)).

Um variograma só tem sentido quando calculado sobre variáveis de suporte constante. As variáveis devem ser aditivas para que valores médios se possam calcular (teores em espessuras variáveis são transformados em acumulações, por exemplo).

No caso das amostras estarem alinhadas e segundo uma malha regular, o variograma calcula-se simplesmente pela fórmula

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N'} \sum_{i=1}^{N'} \left[Y(x_i + h) - Y(x_i) \right]^2$$

onde N' é o número de pares de dados distanciados de h.

Pode suceder que um determinado nó da malha não tenha sido amostrado e então o variograma não considera os pares de pontos que «liguem» com esse ponto (Fig. 7).

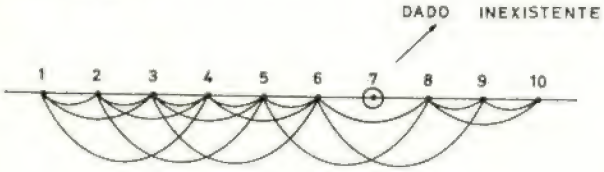


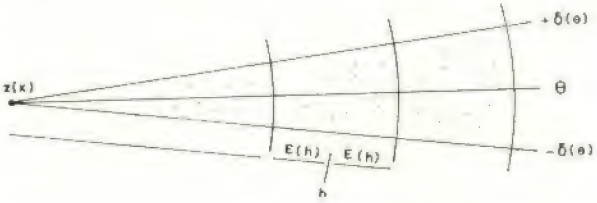
Fig. 7

γ (1) → 7 pares
γ (2) → 6 pares
γ (3) → 5 pares
γ (4) → 5 pares
γ (5) → 4 pares
γ (6) → 3 pares
γ (7) → 3 pares
γ (8) → 2 pares
γ (9) → 1 par

Os variogramas calculados em cada linha são agrupados em linhas paralelas por média ponderada pelo número de pares de pontos que entram em cada linha.

No caso dos dados estarem alinhados mas a malha de amostragem não ser regular, definem-se classes de distância $\varepsilon(h)$ e tomar-se-ão todos os pares de pontos distantes de $h \pm \varepsilon(h)$ para a estimação de h. $\varepsilon(h)$ será menor para as pequenas distâncias.

No caso de dados aleatoriamente distribuídos no plano, faz-se um agrupamento por classes de ângulos. Para a construção do variograma na direcção θ e para o passo h, cada valor z(h) é associado com todos os que caiem, para a distância $h \pm \varepsilon(h)$, no ângulo $\theta \pm \delta(\theta)$.



Evidentemente que a prática ditará as classes de distância e de ângulos a considerar em cada caso concreto.

No caso extremo em que os processos precedentes não se adaptam a uma configuração extremamente irregular de dados, pode recorrer-se à partição do espaço em blocos regulares, agrupando toda a informação que cai dentro do bloco e calculado o variograma sobre as médias ponderadas de todas as amostras interiores a cada bloco.

Todos estes processos de agrupamento de dados «regularizam» o variograma experimental e é por vezes necessário reconstruir o variograma real.

O variograma experimental obtido é sempre uma curva irregular com flutuações que crescem com h (menor significado estatístico, visto que as médias são calculadas com menos pares de pontos). Na prática, só se tomará um quarto da dimensão total do campo, para o ajustamento do modelo teórico.

4.6 — Ajustamento de um modelo teórico

Os modelos teóricos de que se dispõe na maioria dos casos práticos reduzem-se aos seguintes tipos:

a) *esquemas com patamar*

— esquema esférico

$$\gamma(h) = \begin{cases} C\left[\dfrac{3h}{2a} - \dfrac{h^3}{2a^3}\right] & h \leq a \\ C & h > a \end{cases}$$

— esquema exponencial

$$\gamma(h) = C\left[1 - e^{-h/a}\right] \quad h \geq o$$

— esquema de Gauss

$$\gamma(h) = C\left[1 - e^{-h^2/a^2}\right] \quad h \geq o$$

(*) As amostras devem provir de zonas homogéneas da jazida. Por exemplo, não se tratará simultaneamente a parte oxidada e os sulfuretos de um jazigo de cobre.

b) *esquemas sem patamar*

— esquema linear

$$\gamma(h) = p\ h$$

— esquema logarítmico (de Wijs)

$$\gamma(h) = A \log h \quad h \geqslant a$$

O variograma mais utilizado na prática é o *esquema esférico* e o seu ajustamento faz-se em geral por um processo gráfico (desaconselham-se os processos automáticos do tipo mínimos quadrados). Depois de obtido o efeito de pepita por extrapolação para o eixo das ordenadas, tira-se uma tangente na origem à curva experimental. Esta intercepta o patamar (que deve ser comparado com a variância à priori e ajustado na prática) numa abcissa a' que é ⅔ da amplitude a.

O esquema fica assim definido conhecendo C, C_0 e a.

5 — REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Matheron** — Les Variables Régionalisées et leur estimation, Masson & Cie, Paris, 1965.

[2] **Matheron** — La théorie des variables régionalisées, et ses aplications, C. M. M. de Fontainebleau, Fascicule 5, 1970.

[3] **Journel** — Guide pratique de geostatistique minière, C. M. M., Fontainebleau, 1975.

[4] **David** — Geostatistical ore reserve estimation, Rapport EP-75-R, Ecole Polytéchnique de Montreal, 1975.

[5] **Marechal** — Géostatistique et applications minières, *Annales des Mines*, Novembre 1975. p. 27-38.

[6] **Muge, Cortez, Pereira** — Apontamentos de Geoestatística, IST, Lisboa, 1975.

[7] **Damay** — Application de la geostatistique au niveau d'un groupe minier, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.

[8] **Damay** — L'ingénieur des mines et la recherche opérationnelle, *Revue de l'Industrie Minérale*, Mars 1975, p. 127-133.

[9] **Krige** — A review of the development of geostatistics in South Africa, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.

[10] **Rutledge** — The potential of geostatistics in the development of mining, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.

[11] **Berry, Guarascio, Sciotti** — Analisi geostatistica del grado di fratturazione della roccia per la previsione del rendimento in blocchi in cave di tufo litoide, proceedings do 1.° Convegno Internazionale sulla coltivazione di pietre e minerali litoidi, Torino, Otto. 1974.

[12] **David, Dagbert** — Lakeview revisited: variograms and correspondence analysis — new tools for the understanding of geochemical data, Ecole Polytechnique de Montreal, 1975.

[13] **Delhomme, Delfiner** — Application du krigeage à l'optimisation d'une campagne pluviométrique en zone aride, C M. M., Fontainebleau, 1973.

[14] **Chilès** — How to adapt kriging to non-classical problems: three cases studies, proceedings of Nato ASI Geostat 75, Rome.

[15] **Monget, Bordet** — Le variogramme, revelateur de structure d'un champ bidimensionnel, C. M. M., Fontainebleau, 1972.

[16] **Clark** — An application of geostatistics to time series data, proceedings of Nato ASI geostat 75, Rome.

[17] **Krige** — Some basic considerations in the applications of geostatistics to the valuation of ore in South African Gold Mines *J. South Af. Inst. of Min. and Met.*, April 1976, p. 383-391.

[18] **Matheron** — Le Krigeage Universel, C. M. M. de Fontainebleau, Fascicule 1, 1969.

[19] **Rogado, Pereira, Muge, Cortez** — Comments on the feasibility report of the TETELO project, unpublished report, Lisboa 1974.

[20] **Cortez, Pereira, Muge** — Tratamento Geoestatistico de parâmetros mineiros, I Congresso Luso-Hispano-Americano de Geologia Económica, Lisboa-Madrid, 1971.

[21] **Cortez, Muge, Pereira** Ore reserve estimation of a gold orebody with imbricated structures, 12th APCOM, Golden, 1974.

[22] **Rogado, Cortez, Pereira, Muge** — Avaliação da reserva mineral e parametrização do projecto METAGO, relatório não publicado para PAA/ /EIM, Lisboa, 1976.

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D U. 519.25/27/28:622.1

Introdução à estimação geoestatística

LEOPOLDO PARREIRA CORTEZ (*)

RESUMO

O problema da estimação geoestatística consiste na inferência de estimadores de certas características globais ou médias de um determinado domínio (por exemplo, a reserva total ou o teor médio de um jazigo mineral), com base na informação obtida através de uma amostragem parcelar, e na quantificação da precisão dessa estimação. Esta quantificação é feita através da variância de estimação, e utiliza o variograma das variáveis regionalizadas que definem as características a estimar, como instrumento de trabalho.

Neste capítulo fornecem-se as funções teóricas do cálculo das variâncias de estimação e indicam-se alguns processos práticos para a realização desse cálculo. A finalizar, apresentam-se duas aplicações concretas da estimação geoestatística, respectivamente à optimização do reconhecimento de um jazigo filoneano sub-vertical por galerias de nível amostradas por rouços, e ao cálculo global da reserva em minério e em metal e do teor médio de um jazigo estratiforme amostrado por uma malha regular de sondagens.

ABSTRACT

Geostatistical estimation deals with inference of estimators for some global or mean characteristics of a certain space based on discontinuous sampling, and with the precision of this estimation, which is quantified by the estimation variance; the fundamental function in error computations is the variogram.

Theoretical basis for calculation of estimation variances are referred, and some practical processes are proposed. In the last part, two examples of applications are given, respectively to the optimization of the sampling of a vein orebody recognized by horizontal galleries, and to the global ore reserve and mean grade estimations of a stratiform orebody recognized by a regular pattern of drill holes.

PLANO:

1 — Posição do problema.

1.1 — O problema da estimação em Geoestatística
1.2 — Cálculo do estimador
1.3 — Cálculo do erro de estimação

2 — Variância de estimação: definição.

2.1 — Probabilização do erro de estimação
2.2 — Elaboração do estimador
2.3 — Estimação de uma média por outra
2.4 — O variograma como «ferramenta» de estimação».

3 — Variância de dispersão.

3.1 — Definição
3.2 — Relação de Krige
3.3 — Covariância de duas amostras
3.4 — Cálculo da dispersão experimental

(*) Investigador Assistente do I. N. I. C. no C. V. R. M. U. L.; Eq. a Assistente do Instituto Superior Técnico.

4 — Prática da estimação geoestatística.

4.1 — Generalidades
4.2 — Cálculo numérico dos variogramas médios
4.3 — Funções auxiliares
4.4 — Princípios de aproximação para a composição de variâncias de estimação elementares
4.5 — O problema do suporte: regularização e acumulação

5 — Aplicações.

5.1 — Aplicação à optimização de um reconhecimento
5.2 — Aplicação ao cálculo de reservas

6 — Bibliografia.

1 — POSIÇÃO DO PROBLEMA

1.1 — O problema da estimação em Geoestatística

O problema da estimação em Geoestatística deriva da necessidade de inferior *estimadores* para os valores de variáveis regionalizadas (V. R.) em determinados domínios (os seus campos de aplicação), a partir de dados experimentais medidos sobre suportes que não abrangem totalmente tais domínios, ou que podem inclusivamente situar-se exteriormente a eles. Trata-se, pois, do problema clássico da *inferência estatística*, que aparece sempre que se pretende estudar uma população através de uma *amostragem*.

Como é evidente e conhecido, estas estimações são sempre afectadas de um *erro*, que é necessário calcular para que se possa avaliar a precisão da estimação. Este erro é, normalmente, calculado através da *variância*, e pode ser fornecido sob a forma, por exemplo, de um intervalo de confiança válido para um certo nível de probabilidade.

Note-se, finalmente, que a inferência estatística é possível, como se referiu já, devido às hipóteses de estacionaridade assumidas para as V. R.

1.2 — Cálculo do estimador

Como se sabe, a estatística clássica demonstra que o melhor estimador de uma população de variáveis independentes reconhecida através de um conjunto de amostras é a média (ponderada pelas respectivas zonas de influência) dos valores amostrados.

Mas, como já se viu em capítulo anterior, a estatística clássica não toma em consideração a estrutura subjacente ao fenómeno, traduzida pelas correlações entre as variáveis, mas somente os valores amostrados independentemente das suas posições relativas, pelo que às estimações realizadas com base na regionalização da variável correspondem sempre erros menores do que aqueles que a estatística clássica apresenta. Exceptua-se, evidentemente, o caso de distribuições puramente aleatórias (efeito de pepita puro), em que os resultados obtidos são idênticos por não existir correlacão entre as amostras.

Assim, sucede naturalmente que o melhor estimador de um conjunto de valores de uma V. R. não seja uma simples média, geometricamente ponderada, dos valores amostrados na zona a estimar, mas uma combinação desses valores que tome em conta as respectivas posições relativas e, portanto, a ligação estrutural existente entre as amostras, podendo eventualmente tomar também em consideração valores de amostras exteriores àquela zona, desde que ainda estejam correlacionados com ela.

Este problema de determinar o *melhor estimador linear* possível do valor de uma V. R. num certo campo, com base em toda a informação disponível, foi resolvido por G. MATHERON [(13) ou (14)], que o designou por *Krigagem*, e será tratado noutro capítulo.

1.3 — Cálculo do erro de estimação

O erro de estimação, como já se referiu, é normalmente calculado através da variância da distribuição dos valores amostrados, que designaremos por variância «à priori».

Esta, como se sabe, define-se pela expressão:

$$\sigma^2 = E\left[Z_i - \overline{Z}\right]^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2$$

em que Z_i são os N valores amostrados, e $\overline{Z}$ o seu valor médio dado por:

$$\overline{Z}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

no caso de a função de ponderação ser constante.

Também é conhecido que a variância do estimador do valor médio da população é dado por:

$$\sigma^2_{\overline{Z}^*} = \frac{\sigma^2}{N}$$

A partir destes valores podem-se calcular, por exemplo, os intervalos de confiança para vários níveis de probabilidade. Assim, sabe-se que o verdadeiro valor médio da população tem uma probabilidade de 95 % de estar contido no intervalo $\left[\overline{Z}^* - 2\sigma_{\overline{Z}^*}, \overline{Z}^* + 2\sigma_{\overline{Z}^*}\right]$, que é o nível geralmente utilizado como fornecendo uma precisão razoável.

O método da Estatística clássica atrás desenvolvido pressupõe, como se mencionou, que as amostras são independentes entre si, o que não é o caso das V. R. Para estas, o método de cálculo dos erros de estimação tem de ser outro, baseado na teoria das funções aleatórias, que se expõe a seguir.

Para tal, convém fazer uma primeira distinção entre dois tipos de varincias: a *variância de estimação* (notação σ^2), que caracteriza a qualidade de uma estimação, e a *variância de dispersão* (notação D^2), que caracteriza a variabilidade espacial de uma quantidade (de um teor, por exemplo).

2 — VARIÂNCIA DE ESTIMAÇÃO: DEFINIÇÃO

2.1 — Probabilização do erro de estimação

Seja z o verdadeiro valor desconhecido de uma característica de uma determinada zona do campo onde ela é definida, que se pretende calcular pelo estimador z* (de valor conhecido através de uma Krigagem, ou pela média de valores amostrados, ou mesmo por uma única amostra, por exemplo). O erro que se comete na estimação de z por z* é (z−z*), e poderá ser caracterizado, em termos probabilísticos, pela sua variância. Vejamos como:

O método probabilístico usado na Geostatística interpreta z, z* e (z − z*) como realizações particulares de funções aleatórias (F. A.) Z, Z* e (Z−Z*), isto é, como V. R.

Esta interpretação é possível graças às hipóteses de estacionaridade já referidas, nomeadamente à hipótese intrínseca que permite admitir que as características estatísticas de um dado domínio permanecem as mesmas, em média, quando este se desloca por translação através do espaço.

Assim, se deslocarmos no espaço a zona (um painel mineiro, por exemplo) e as amostras que serviram para a construção do estimador z*, ligados um ao outro, a cada implantação do painel corresponde um valor para o seu teor verdadeiro z, e um só valor do estimador z*.

Quer dizer, o erro (Z−Z*) é uma variável aleatória que pode ser caracterizada pelos seus dois primeiros momentos:

— a média: $m = E[Z-Z^*]$

— a variância de estimação: $\sigma^2_E = E\left\{\left[Z - Z^*\right]^2\right\} - m^2$

Esta variância de estimação de Z por Z* é portanto, a variância do erro (Z−Z*), em que cada valor numérico é tomado numa implantação particular do conjunto ligado painel-amostras.

Devido à hipótese intrínseca, esta variância permanece constante se for medida numa outra zona do mesmo domínio, mas varia se for calculada para outra posição das amostras na zona (painel).

Note-se que sendo $m \neq O$, a estimação é *enviezada*. Se m = O, a variância de estimação será dada por: $\sigma^2_E = E\,[Z-Z^*]^2$.

2.2 — Elaboração do estimador

O estimador Z* é sempre, de um modo ou de outro, uma função de informação I disponível através da amostragem realizada. Suponha-se, por exemplo, que I seja um conjunto discreto de N amostras $z(x_i)$, i=1 a N.

Então, será: $Z^* = f[Z(x_1), Z(x_2), \ldots Z(x_i), \ldots Z(x_N)]$

Esta função de N variáveis não pode ser qualquer. Tem, nomeadamente, de respeitar as duas condições seguintes:

a) deve verificar a condição de não enviezamento: $E[Z-Z^*] = O$

b) deve ser tal que se possa calcular a variância de estimação, quer dizer, os termos do desenvolvimento:

$$E[Z-Z^*]^2 = E[Z^2] + E[Z^{*2}] - 2\,E[ZZ^*]$$

É devido à segunda condição que se utilizam geralmente *estimadores lineares*, do tipo:

$$Z^* = \sum_i \lambda_i \, Z(x_i)$$

Um estimador de certo tipo diz-se *óptimo* se minimiza a variância de estimação; por exemplo, o *estimador de Krigagem* é um estimador linear, não enviezado e óptimo.

2.3 — Estimação de uma média por outra

Para fixar ideias, estudemos o caso particular da estimação do teor médio z_v num domínio v através do teor médio $z_{v'}$, calculado sobre outro domínio v', estando ambos os domínios compreendidos num campo homogéneo.

Então, admitindo uma distribuição uniforme da V. R., será por definição:

$$z_v = \frac{1}{v} \int_v z(x)\, dx$$

$$z_{v'} = \frac{1}{v'} \int_{v'} z(x)\, dx$$

Onde z(x) designa a V. R. pontual, e seja Z(x) a F. A. correspondente, suposta estacionária de 2.ª ordem e com variograma $\gamma(h)$.

Note-se que os domínios v e v' podem ser definidos no espaço a 1, 2 ou 3 dimensões; por exemplo, no espaço a 3 dimensões, dx será $dx_1\, dx_2\, dx_3$.

Admitindo a hipótese estacionária, não há enviezamento, pois $E[Z_v] = E[Z_{v'}]$. Portanto, a variância do erro $(Z_v - Z_{v'})$ será: $\sigma_E^2 = E[Z_v - Z_{v'}]^2 = E[Z_v^2] + E[Z_{v'}^2] - 2\,E[Z_v Z_{v'}]$. Mas a variância de Z(v) é dada por:

$$E\left[Z_v^2\right] = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v E\left[Z(x) \,.\, Z(y)\right] dx\, dy = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(x-y)\, dx\, dy$$

em que: $C(x-y) = E[Z(x) \,.\, Z(y)]$ é a covariância da V.A.Z quando x e y descrevem, independentemente um do outro, o domínio v.

De igual modo:

$$E\left[Z_{v'}^2\right] = \frac{1}{v'^2} \int_{v'} \int_{v'} E\left[Z(x) \,.\, Z(y)\right] dx\, dy = \frac{1}{v'^2} \int_{v'} \int_{v'} C(x-y)\, dx\, dy$$

percorrendo agora x e y, independentemente um do outro, o domínio v'.

A covariância de Z_v com $Z_{v'}$ será:

$$E\left[Z_v \; Z_{v'}\right] = \frac{1}{v.v'} \int_v \int_{v'} E\left[Z(x) \,.\, Z(y)\right] dx\, dy = \frac{1}{v\,v'} \int_v \int_{v'} C(x-y)\, dx\, dy$$

onde x e y percorrem, um, o domínio v, e o outro, o domínio v'.

Logo, substituindo valores:

$$E\left[Z_v - Z_{v'}\right]^2 = \frac{1}{v^2}\int_v\int_v C(x-y)\,dx\,dy + \frac{1}{v'^2}\int_{v'}\int_{v'} C(x-y)\,dx\,dy - \frac{2}{v.v'}\int_v\int_{v'} C(x-y)\,dx\,dy$$

Mas, conforme já se referiu, o variograma pode-se escrever:

$$\gamma(h) = C(O) - C(h)$$

Donde, fazendo $|x - y| = h$, e substituindo $C(h)$ por $C(O) - \gamma(h)$, como $C(O)$ desaparece, vem a expressão final:

$$\sigma_E^2 = E\left[Z_v - Z_{v'}\right]^2 = \frac{2}{v.v'}\int_v\int_{v'}\gamma(x-y)\,dx\,dy - \frac{1}{v^2}\int_v\int_v\gamma(x-y)\,dx\,dy - \frac{1}{v'^2}\int_{v'}\int_{v'}\gamma(x-y)\,dx\,dy$$

Ou, em notação simbólica:

$$\sigma_E^2 = 2\,\overline{\gamma}(v, v') - \overline{\gamma}(v, v) - \overline{\gamma}(v', v')$$

O símbolo $\overline{\gamma}(v, v')$, por exemplo, designa o valor médio do variograma $\overline{\gamma}(x-y)$ quando os dois pontos de apoio x e y descrevem indepedentemente, um o domínio v e o outro o domínio v'.

Esta expressão tem a vantagem de permanecer válida para qualquer F. A. intrínseca, mesmo se a covariância $C(x-y)$ não existir. Todavia, se se preferir trabalhar com covariâncias (e se elas existirem) pode-se usar a notação simbólica:

$$\sigma_E^2 = \overline{C}(v, v) + \overline{C}(v', v') - 2\,\overline{C}(v, v')$$

Estas expressões podem estender-se a domínios v e v' de qualquer geometria e não forçosamente compactos ou contínuos: por exemplo, o domínio v a estimar pode ser constituído por dois painéis distintos, $v = v_1 + v_2$; os domínios v e v' podem ser disjuntos (total ou parcialmente) ou estar um incluído no outro; o domínio v' pode ser constituído por várias amostras discretas, etc.

A leitura das expressões de σ_E^2 mostra 4 factores essenciais e intuitivos de que depende a qualidade de qualquer estimação de v por v':

a) a geometria do domínio a estimar: termo $\overline{\gamma}(v, v)$
b) a geometria do domínio estimante: termo $\overline{\gamma}(v', v')$
c) o grau de regularidade do fenómeno estudado: utilização da característica estrutural *variograma*
d) a geometria relativa (distâncias) de v e v': termo $\overline{\gamma}(v, v')$.

O modo de cálculo dos valores médios do variograma será tratado à frente. No caso, atrás referido, de v' ser constituído por N amostras discretas x_i, e $z_{v'}$ ser a *média aritmética* desses valores, isto é:

$$z_{v'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(x_i)$$

Será:

$$\overline{\gamma}(v, v') = \frac{1}{N.v}\sum_{i=1}^{N}\int_v \gamma(x - x_i)\,dx$$

$$\overline{\gamma}(v, v) = \frac{1}{v^2}\int_v\int_v \gamma(x-y)\,dx\,dy$$

$$\overline{\gamma}(v', v') = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(x_i - x_j)$$

A fórmula atrás deduzida também se aplica, como é evidente, à variância de estimação do teor médio z_v de um painel v por uma *combinação linear* z^*_v das informações disponíveis.

Por exemplo, se se dispõe de N informações S_i de teores médios $z(x_i)$, e sendo λ_i o ponderador associado à informação S_i, o estimador é, como já se viu:

$$z^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, z(x_i)$$

A variância de estimação escreve-se então, em notação simbólica:

$$\sigma_E^2 = E\left[Z_v - Z^*\right]^2 = 2\sum_i \lambda_i \bar{\gamma}(v, S_i) - \bar{\gamma}(v, v) - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \bar{\gamma}(S_i, S_j)$$

Esta expressão é geral quaisquer que sejam as geometrias do painel v e das informações S_i, e quaisquer que sejam os ponderadores λ_i. Contudo, o não enviezamento deve ser assegurado: $E[Z_v - Z^*] = 0$, para o que basta impor a condição: $\sum_i \lambda_i = 1$, como se verá no capítulo seguinte sobre Krigagem.

2.4 — O variograma como «ferramenta» de estimação

As expressões atrás deduzidas têm a vantagem fundamental de necessitarem apenas do cálculo de variogramas médios para se conhecer o erro de qualquer estimação. Isto é, realizada uma análise estrutural do campo de aplicação da V. R. em estudo, e definido o esquema teórico *(o modelo)* que melhor interpreta o variograma experimental da regionalização (observando todas as condições já mencionadas no capítulo respectivo), podem-se avaliar os erros inerentes a qualquer estimação feita dentro do domínio de validade desse modelo.

Esta propriedade não é de estranhar visto que, como se sabe, o variograma (pela sua própria definição: $2\,\gamma(h) = E[Z(x+h) - Z(x)]^2$) pode ser interpretado como a variância do erro que se comete ao estimar um teor desconhecido (em $(x+h)$) por meio de um dado $z(x)$ (em x). Como em estatística se caracteriza a amplitude de um erro aleatório pela sua variância, pode-se considerar $2\,\gamma(h)$ como a variância de estimação de $z(x+h)$ por $z(x)$ (ou vice-versa).

3 — VARIÂNCIA DE DISPERSÃO

3.1 — Definição

Considere-se um conjunto discreto de N valores $z(x_i)$, com $i=1$ a N. Seja: $\bar{Z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(x_i)$ o valor médio deste conjunto.

Os N valores $z(x_i)$ dispersam-se em torno da média $\bar{z}$, podendo esta dispersão ser caracterizada pela expressão:

$$d^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[z(x_i) - \bar{z}\right]^2$$

Tendo o conjunto dos N valores sido tornado aleatório, pode-se definir a variável aleatória d^2 cuja esperança é, por definição, a variância de dispersão do conjunto discreto das N V. A. $Z(x_i)$, $i=1$ a N:

$$D^2 = \frac{1}{N} E\left\{\sum_i \left[Z(x_i) - \bar{Z}\right]^2\right\}$$

A dispersão experimental d^2 representa então um estimador desta variância de dispersão D^2.

Esta definição pode ser generalizada a conjuntos contínuos do seguinte modo: seja um painel qualquer de volume V centrado no ponto x. O teor médio deste painel será:

$$z_v(x) = \frac{1}{V}\int_v z(x+u)\,du$$

Considere-se, no interior deste painel V, um bloco (unidade de produção) de volume v centrado no ponto y, e de teor médio:

$$z_v(y) = \frac{1}{v} \int_v z(y+w)\, dw$$

A cada posição y da unidade v no interior do painel V, corresponderá um valor particular $z_v(y)$; a dispersão destes valores em torno da sua média $z_v(x)$ pode ser caracterizada por:

$$s^2(x) = \frac{1}{V} \int_V [z_v(y) - z_V(x)]^2\, dy$$

O conjunto dos valores $z_v(y)$ e $z_v(x)$ tendo sido tornado aleatório, então $s^2(x)$ aparece como uma realização particular da V. A. $S^2(x)$, dada por:

$$S^2(x) = \frac{1}{V} \int_V [Z_v(y) - Z_V(x)]^2\, dy$$

A esperança (valor médio) desta V. A. $S^2(x)$ é, por definição, a *variância de dispersão* do volume v no volume V:

$$D^2(v/V) = E\left\{\frac{1}{V} \int_V [Z_v(y) - Z_V(x)]^2\, dy\right\}$$

A hipótese da estacionaridade da F. A. Z(x) implica que $E[S^2(x)]$ não depende da posição particular x do painel V, e portanto a expressão de $D^2(v/V)$ é geral e pode ser calculada do seguinte modo: considera-se o volume V como a reunião de N volumes v_i disjuntos, todos iguais entre si e de valor v (ou seja, cada um dos v_i deduz-se de v por translação). Seja $Z(x_i)$ o teor médio de Z(x) em v_i, e Z(V) o teor médio de volume V. Então, de acordo com o que se referiu, vem:

$$D^2(v/V) = D^2 = \frac{1}{N} E\left\{\sum_i [Z(x_i) - Z(V)]^2\right\} = \frac{1}{N} \sum_i E[Z(x_i) - Z(V)]^2$$

Ou seja, é o valor médio das variâncias de estimação de v_i a V. Donde, notando que $V = \sum_i v_i = Nv$, o desenvolvimento da expressão vem:

$$D^2(v/V) = \frac{1}{N} \sum_i \left\{ E\left\{[Z(x_i)]^2\right\} + E\left\{[Z(V)]^2\right\} - 2E[Z(x_i) \cdot Z(V)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i \left[\frac{1}{v_i^2} \int_{v_i} \int_{v_i} C(x_i - y_i)\, dx_i\, dy_i\right] + \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(x-y)\, dx\, dy -$$

$$- \frac{2}{N} \sum_i \left[\frac{1}{V \cdot v_i} \int_{v_i} \int_V C(x_i - y)\, dx_i\, dy = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v C(x-y)\, dx\, dy -\right.$$

$$- \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(x-y)\, dx\, dy$$

Ou seja, em notação simbólica:

$$D^2(v/V) = \overline{C}(v, v) - \overline{C}(V, V)$$

Ou ainda, utilizando o variograma de F. A. pontual Z(x) em vez da covariância:

$$D^2(v/V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-y)\, dx\, dy - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x-y)\, dx\, dy = \overline{\gamma}(V, V) - \overline{\gamma}(v, v)$$

Isto é, a expressão da variância de dispersão depende apenas do variograma e das geometrias respectivas de v e V.

3.2 — Relação de Krige

Suponha-se o caso da variância de dispersão de v em V, quando o volume v está reduzido a um ponto. Então, a variância $D^2(O/V)$ da variável pontual $Z(x)$ é dada por:

$$D^2(O/V) = E[Z(x) - Z(V)]^2$$

Ou seja, desenvolvendo:

$$D^2(O/V) = E\left\{[Z(x)]^2\right\} + E\left\{[Z(V)]^2\right\} - 2E[Z(x).Z(V)] =$$

$$= \frac{1}{V^2}\int_V\int_V C(x-y)\,dx\,dy - \frac{2}{V}\int_V C(x-y)\,dy$$

Atendendo a que:

$$\int_V C(x-y)\,dy = \frac{1}{V}\int_V\int_V C(x-y)\,dx\,dy$$

Vem finalmente (passando para variogramas):

$$D^2(O/V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-y)\,dx\,dy = \overline{\gamma}(V, V)$$

Isto é, o valor médio do variograma quando os dois pontos de apoio descrevem, independentemente um do outro, o volume V.

É evidente que será também:

$$D^2(O/V) = \overline{\gamma}(v, v)$$

Donde se pode escrever a expressão da variância de dispersão de v em V:

$$D^2(v/V) = D^2(O/V) - D^2(O/v)$$

Designe-se por G o volume de um jazigo composto por vários painéis de volume V, dividido, por exemplo, em unidades de volume v, de tal modo que $v \subset V \subset G$. Neste caso, será:

$$D^2(v/G) = D^2(O/G) - D^2(O/v)$$

Subtraindo a expressão anterior desta:

$$D^2(v/G) - D^2(v/V) = D^2(O/G) - D^2(O/V) = D^2(V/G)$$

Ou seja, a relação de aditividade:

$$D^2(v/G) = D^2(v/V) + D^2(V/G)$$

Isto é, a dispersão da unidade v no jazigo G é igual à soma da dispersão de v no painel V com a dispersão de V em G.

Esta relação é conhecida como *relação de Krige*, por ter sido experimentalmente verificada por este técnico nas minas de ouro sul-africanas, bastante tempo antes de ter sido estabelecida teoricamente.

Verifica-se assim que, qualquer que seja a posição do painel V no jazigo G, as suas unidades internas possuem a mesma variância de dispersão (resulta de $D^2(v/V) = D^2(v/G) - D^2(V/G)$). Isto é, esta não depende da localização particular do painel, mas única e exclusivamente do seu tamanho e forma.

Diz-se então que o espaço mineralizado possui uma *lei de dispersão intrínseca*, ou seja, que o grau de descontinuidade da mineralização é sempre o mesmo (V. hipótese intrínseca).

3.3 — Covariância de duas amostras

Sejam v e v' duas amostras de distância e disposição mútua fixas no campo V.

Define-se, de forma análoga às anteriores, a sua covariância como:

$$D(v, v'/V) = \frac{1}{V^2} \int_v \int_v \gamma(x-y)\, dx\, dy - \frac{1}{v \cdot v'} \int_v \int_{v'} \gamma(x-y)\, dx\, dy = \overline{\gamma}(V, V) - \overline{\gamma}(v, v')$$

Assim, a variância de estimação pode ser expressa em função das variâncias e covariâncias de v e v' em V por:

$$\sigma_E^2 = D^2(v/V) + D^2(v'/V) - 2\, D(v, v'/V)$$

3.4 — Cálculo da dispersão experimental

Se se dispõe de N dados experimentais $z_v(x_i)$, $i=1$ a N, repartidos uniformemente no campo V, a dispersão experimental:

$$d^2 = \frac{1}{N} \sum_i \left[z_v(x_i) - \overline{z}_v \right]^2$$

com:

$$\overline{z}_v = \frac{1}{N} \sum_i z_v(x_i)$$

é um estimador do valor teórico da dispersão $D^2(v/V)$.

Convém notar finalmente que os resultados teoricamente obtidos traduzem dois fenómenos experimentais bem conhecidos dos mineiros:

a) A dispersão de um conjunto de dados amostrados num volume V em torno do seu valor médio, cresce com a dimensão de V; tal é a consequência lógica da existência de *correlação espacial* entre as amostras: quanto mais próximas estão, mais os seus valores são, em média, próximos uns dos outros.

b) A dispersão de um conjunto de dados de volume v, amostrados num volume V fixo, em torno do seu valor médio, diminui quando v cresce; é o fenómeno da regularização: a variabilidade dos teores médios dos blocos de exploração é *atenuada* em relação à dos teores de «carottes» de sondagens, por exemplo.

4 — PRÁTICA DA ESTIMAÇÃO GEOESTATÍSTICA

4.1 — Generalidades

As expressões atrás deduzidas são, normalmente, de difícil aplicação prática. Note-se que, por exemplo, o cálculo do variograma médio:

$$\overline{\gamma}(v, v') = \frac{1}{v \cdot v'} \int_v \int_{v'} \gamma(x-y)\, dx\, dy$$

implica o cálculo de um integral sextuplo (num espaço a 3 dimensões), cujo cálculo analítico directo é complexo.

Duas soluções práticas se apresentam:

a) *Cálculo numérico* (em ordenador) dos valores médios dos variogramas.

b) Decompor a resolução analítica dos integrais sextuplos em etapas sucessivas, algumas das quais são previamente resolvidas e tabeladas uma vez por todas. Estas etapas intermédias correspondem à definição de *funções auxiliares* e à utilização de *ábacos*, e a sua interligação implica a admissão de *princípios de aproximação* para a composição dos vários termos.

Note-se ainda que o problema do *suporte* das amostras, como se referiu em capítulo anterior, tem implicações no cálculo dos variogramas. Com efeito, as expressões deduzidas são válidas para variogramas pontuais (com suporte de volume nulo ou que possa ser tomado como desprezável em face do volume a estimar), enquanto que, na prática, não se tem nunca acesso a valores pontuais $z(x_i)$, mas sim a dados regularizados sobre um certo suporte de dimensões, por vezes, consideráveis.

É, então, necessário deduzir os variogramas pontuais a partir dos variogramas regularizados.

Este problema da *regularização* será tratado adiante.

4.2 — Cálculo numérico dos variogramas médios

É a solução normalmente mais rápida se se dispõe de um ordenador, ou mesmo de uma pequena calculadora programável.

Implanta-se uma malha regular (ou aleatória, ou aleatória estratificada) x_i, com $i=1$ a N, no volume v, uma outra (idem) y_j, com $j=1$ a N', no volume v', e assimila-se o integral sextuplo a uma dupla soma discreta:

$$\overline{\gamma}(v, v') \simeq \overline{\gamma}^*(v, v') = \frac{1}{N \cdot N'} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N'} \gamma(x_i - y_j)$$

Conhecidas as coordenadas x_i e y_j e o modelo $\gamma(h)$, o ordenador calcula automaticamente este *estimador do valor médio do variograma.*

Um exemplo de programa deste tipo é dado em M. DAVID (5), existindo também outros na biblioteca de programas do C. V. R. M. U. L.

O erro deste estimador está dependente, como é óbvio, da densidade de discretização no interior de v e v', diminuindo quando N e N' aumentam. É essencial que este erro não seja tal que mascare a variabilidade estudada. Assim, para uma variância de dispersão $D^2(v/V) = \overline{\gamma}(V, V) - \overline{\gamma}(v, v)$ os estimadores numéricos $\gamma^*(V, V)$ e $\gamma^*(v, v)$ devem verificar a relação de ordem teórica $\overline{\gamma}(V, V) > \overline{\gamma}(v, v)$. Também para uma variância de estimação $\sigma^2_E = 2\overline{\gamma}(v, v') - \overline{\gamma}(v, v) - \overline{\gamma}(v', v')$, os três erros numéricos arriscam, ao acumular-se, a mascarar a variância σ^2_E procurada.

Na prática, as três regras seguintes devem ser sempre observadas:

a) Os diferentes estimadores numéricos devem conservar entre si todas as *relações de ordem teóricas.*

b) A discretização deve ser a mesma para todas as estimações numéricas $\overline{\gamma}^*$ dos valores $\overline{\gamma}$ de uma mesma fórmula. Assim, por exemplo, os três valores $\overline{\gamma}$ da expressão $\sigma^2_E = 2\overline{\gamma}(v, v') - \overline{\gamma}(v, v) - \overline{\gamma}(v', v')$ devem ser estimados com a mesma discretização (N pontos em v e N' pontos em v'). Esta regra garante a *coerência* da fórmula: com efeito, a variância σ^2_E é então calculada como a variância de estimação de N pontos de v por N' pontos de v'.

c) A densidade de discretização depende dos objectivos visados, e será em geral optimizada com a experiência. De início, pode-se proceder por iterações, até que o suplemento de discretização já não melhore significativamente a precisão da estimação.

Como *regra empírica,* e para fins de Krigagem, bastam, em geral, as seguintes discretizações:

— $N=10$ pontos, para v a 1 dimensão
— $N=6\times6$ pontos, para v a 2 dimensões
— $N=4\times4\times4$ pontos, para v a 3 dimensões.

No capítulo sobre krigagem, onde o cálculo dos valores médios do variograma é essencial, este ponto será retomado e aprofundado.

4.3 — Funções auxiliares

Uma função auxiliar é um valor médio $\overline{\gamma}(v, v')$ correspondente a geometrias v e v' particularmente simples mas de uso frequente nos estudos habituais. Normalmente, usam-se 4 funções auxiliares, simboli-

MAGUE

"4 Guindastes eléctricos para o cais comercial do Porto de Aveiro:

– 1 Guindaste de 6 – 12t/24 – 20 m
– 3 Guindastes de 3 – 6t/24 – 20 m"

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

Você sabe o que é "know-how"?

No tempo em que a maior valorização do homem é o seu conhecimento. No tempo em que a mais valia das empresas é a sua capacidade técnica. No tempo em que a potencialidade de um país é mais a estrutura tecnológica do que as riquezas de base.

"know-how" ... conhecimento adquirido e a meta perseguida por homens empresas países.

Investigação. Conhecimento. Formação. Tecnologia. Experiência. Técnicos. Quadros e Gestores. Projectos. Capacidade de resposta. Prioridades no futuro. Tudo isto é "know-how".

Nós, na Atlas Copco, fornecemos "know-how" ... e não só no domínio do ar comprimido.

Atlas Copco

SIGTEMA

zadas χ, F, α e H, definidas no espaço a 1 dimensão (as duas primeiras) ou a 2 dimensões (as quatro), consoante a dimensão da figura de integração.

a) *Espaço a 1 dimensão:*

$\vec{x} = \overline{MM'}$

Seja o segmento $\overline{AB}$ de comprimento L, e $\gamma(x)$ o variograma pontual neste espaço.

— Valor médio de $\gamma(x)$ quando M está fixo em A e M' descreve o segmento $\overline{AB}$ de comprimento L:

$$\chi(L) = \overline{\gamma}(A, \overline{AB}) = \frac{1}{L}\int_0^L \gamma(x)\,dx$$

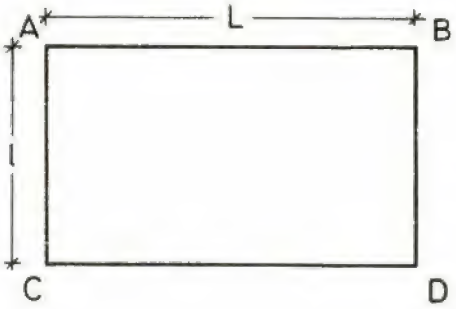
— Valor médio de $\gamma(x)$ quando os 2 pontos M e M' descrevem, independentemente um do outro, o segmento $\overline{AB}$ de comprimento L:

$$F(L) = \overline{\gamma}(\overline{AB}, \overline{AB}) = \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L \gamma(|x-x'|)\,dx\,dx'$$

Demonstra-se que este integral duplo se reduz aos integrais simples seguintes:

$$F(L) = \frac{2}{L^2}\int_0^L x\,.\,\chi(x)\,dx = \frac{2}{L^2}\int_0^L (L-x)\,.\,\gamma(x)\,dx$$

b) *Espaço a 2 dimensões:*



$\vec{h} = \overline{MM'}$

Seja o rectângulo $\overline{ABCD}$ de lados (L, l) no espaço a 2 dimensões, e seja $\gamma(h)$ o variograma pontual *isótropo* (ou tomado como tal, depois de desfeitas eventuais anisotropias geométricas) neste espaço.

— Valor médio de $\gamma(h)$ quando M descreve um lado de comprimento l e M' descreve o lado oposto l, distante de L:

$$\alpha(L, l) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{BD}) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\,\gamma\left(\sqrt{L^2+x^2}\right)\,dx$$

De modo análogo, define-se também $\alpha(l, L) = \overline{\gamma}(\overline{AB}, \overline{CD})$. Note-se que esta função α não é simétrica: $\alpha(L, l) \neq \alpha(l, L)$.

— Valor médio de $\gamma(h)$ quando M descreve um lado de comprimento l e M' descreve todo o rectângulo (L, l):

$$\chi(L, l) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{ABCD}) = \overline{\gamma}(\overline{BD}, \overline{ABCD}) = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha(x, l)\,dx$$

Esta função também não é simétrica: $\chi(L, l) \neq \chi(l, L)$.

— Valor médio de $\gamma(h)$ quando M e M' descrevem, independentemente um do outro, todo o rectângulo (L, l):

$$F(L,l) = F(l,L) = \overline{\gamma}(\overline{ABCD}, \overline{ABCD}) = \frac{2}{L^2}\int_0^L x \cdot \chi(x,l)\,dx = \frac{2}{L^2}\int_0^L (L-x) \cdot \alpha(x,l)\,dx$$

— Valor médio de $\gamma(h)$ quando M descreve um lado de comprimento l e M' descreve um lado adjacente de comprimento L:

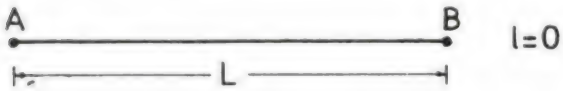
$$H(L,l) = H(l,L) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{AB}) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{CD}) = \overline{\gamma}(\overline{BD}, \overline{AB}) = \overline{\gamma}(\overline{BD}, \overline{CD}) =$$

$$= \frac{1}{2l}\frac{\partial}{\partial l}(l^2 \cdot \chi(L,l)) = \frac{1}{4Ll}\frac{\partial^2}{\partial l\,\partial L}(L^2 \cdot l^2 \cdot F(L,l))$$

Demonstra-se que H(L, l) é também o valor médio de $\gamma(h)$ quando M está fixo num vértice e M' percorre todo o rectângulo (L, l):

$$H(L,l) = \overline{\gamma}(A, \overline{ABCD})$$

c) *Equivalências:*



Note-se que basta reduzir a zero um dos lados do rectângulo $\overline{ABCD}$ para fazer corresponder as funções auxiliares a 1 e a 2 dimensões:

$$\alpha(L,0) = \overline{\gamma}(A,B) = \gamma(L) \qquad \alpha(0,l) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{AC}) = F(l)$$

$$\chi(L,0) = \overline{\gamma}(A, \overline{AB}) = \chi(L) \qquad \chi(0,l) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{AC}) = F(l)$$

$$F(L,0) = \overline{\gamma}(\overline{AB}, \overline{AB}) = F(L) \qquad F(0,l) = \overline{\gamma}(\overline{AC}, \overline{AC}) = F(l)$$

$$H(L,0) = \overline{\gamma}(A, \overline{AB}) = \chi(L) \qquad H(0,l) = \overline{\gamma}(A, \overline{AC}) = \chi(l)$$

Observe-se ainda que todas as funções auxiliares a 1 ou 2 dimensões se podem deduzir duma só, F(L, l), por derivação ou anulação de um parâmetro:

$$\alpha(L,l) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial L^2}(L^2 \cdot F(L,l))$$

$$\chi(L,l) = \frac{1}{2L}\frac{\partial}{\partial L}(L^2 \cdot F(L,l)) \qquad \chi(L) = \chi(L,0) = \frac{1}{2L}\frac{}{\partial L}(L^2 \cdot F(L))$$

$$H(L,l) = \frac{1}{4Ll}\frac{\partial^2}{\partial L\,\partial l}(L^2 \cdot l^2 \cdot F(L,l)) \qquad F(L) = F(L,0)$$

d) *Espaço a 3 dimensões:*

Existem também as correspondentes funções auxiliares α, χ, H e F para configurações paralelipipédicas a 3 dimensões, mas na prática não são utilizadas.

Empregam-se ábacos para as funções auxiliares definidas sobre paralelipípedo de base quadrada (L× ×l×l), dados, por exemplo, em A. JOURNEL (9), em M. DAVID (5), ou em J. SERRA (17), ou então usam-se os princípios de aproximação para a composição das variâncias.

e) *Expressões e Ábacos das Funções Auxiliares para Esquemas Isótropos*

Em A. JOURNEL (9), M. DAVID (5), J. SERRA (17), F. MUGE et al. (15), entre outros trabalhos listados na Bibliografia, apresentam-se expressões e ábacos das funções auxiliares válidas para os esquemas

mais vulgares (linear, logarítmico ou de De Wijs, esférico ou de Matheron, parabólico ou de Gauss, exponencial ou de Formery, etc.), válidos para campos isótropos no espaço a 3 dimensões.

A título exemplificativo, indicam-se as expressões das funções auxiliares a 1 dimensão para o esquema esférico normalizado (efeito de pepita $C_o = O$, patamar $C = 1$, alcance a):

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\frac{h^3}{a^3} & \forall\, h \in [0, a] \\ 1 & \forall\, h \geqslant a \end{cases}$$

$$\chi(L) = \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{L}{a} - \frac{1}{8}\frac{L^3}{a^3} & \forall\, L \in [0, a] \\ 1 - \frac{3}{8}\frac{a}{L} & \forall\, L \geqslant a \end{cases}$$

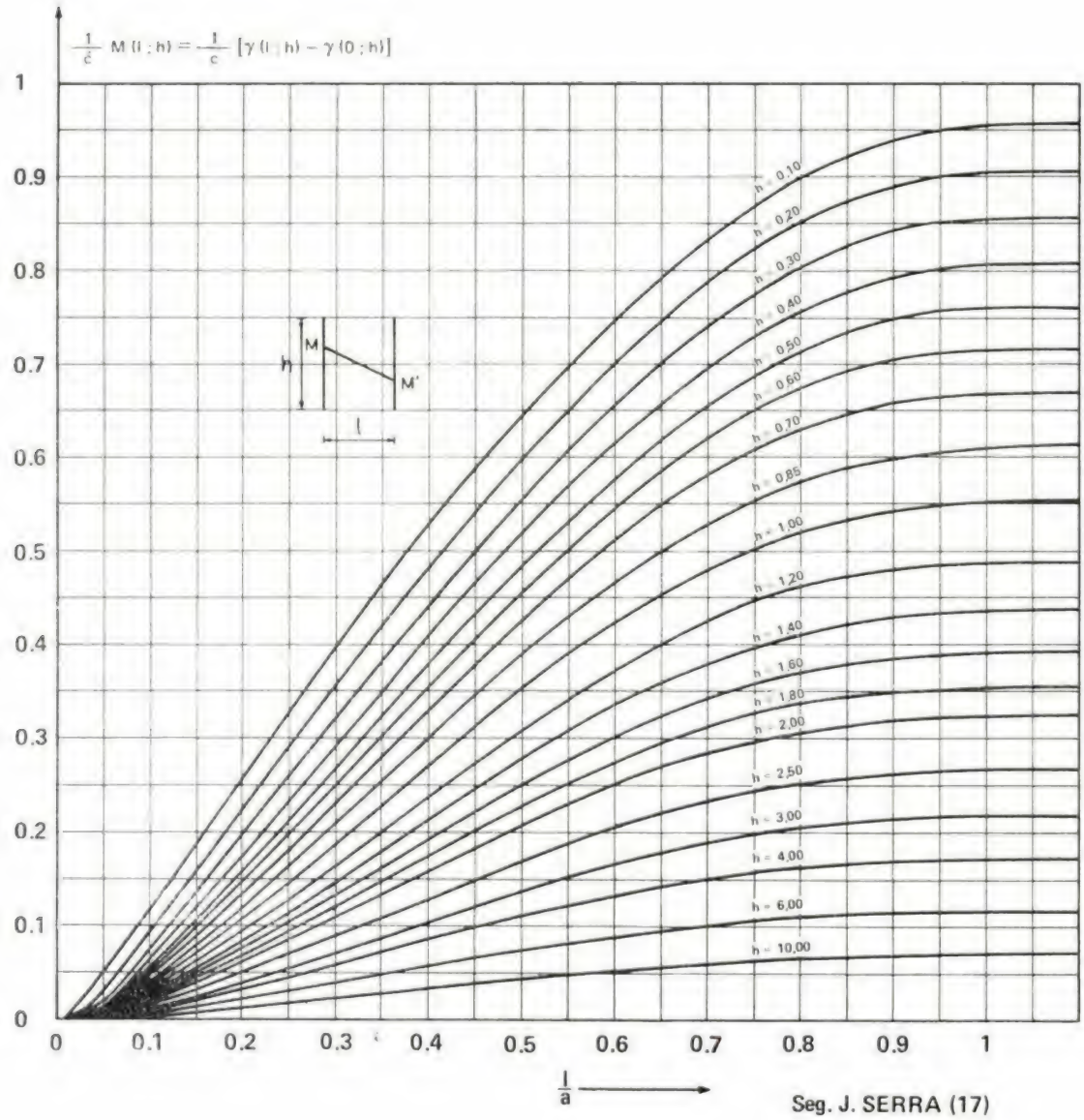
$$F(L) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{L}{a} - \frac{1}{20}\frac{L^3}{a^3} & \forall\, L \in [0, a] \\ 1 - \frac{3}{4}\frac{a}{L} + \frac{1}{5}\frac{a^2}{L^2} & \forall\, L \geqslant a \end{cases}$$

Nos ábacos n.os 1 a 6 estão tabelados, em função de $\frac{L}{a}$ e de $\frac{l}{a}$, as funções seguintes:

Ábaco n.º 1: $\alpha(L, l)$ e $\alpha(O, l)$
» n.º 2: $\chi(L, l)$
» n.º 3: $H(L, l)$
» n.º 4: $F(L, l)$
» n.º 5: $F(L, l, l)$
» n.º 6: $\alpha(L, l, l)$ e $\alpha(O, l, l)$

Os ábacos n.os 7 a 10 referem-se às variâncias de extensão elementares e são explicados adiante.

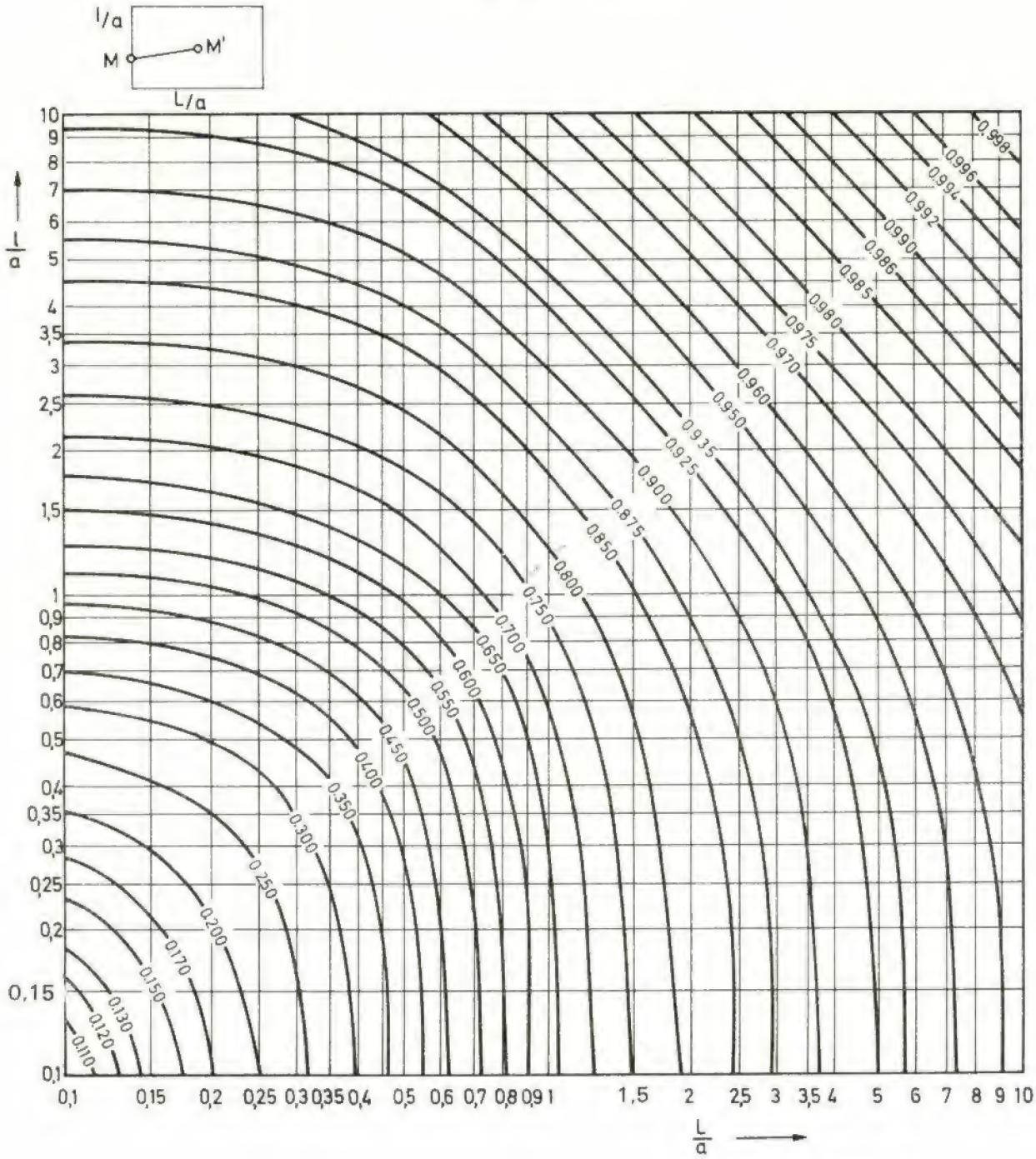
ABACO N. 1



Seg. J. SERRA (17)

ABACO N. 2

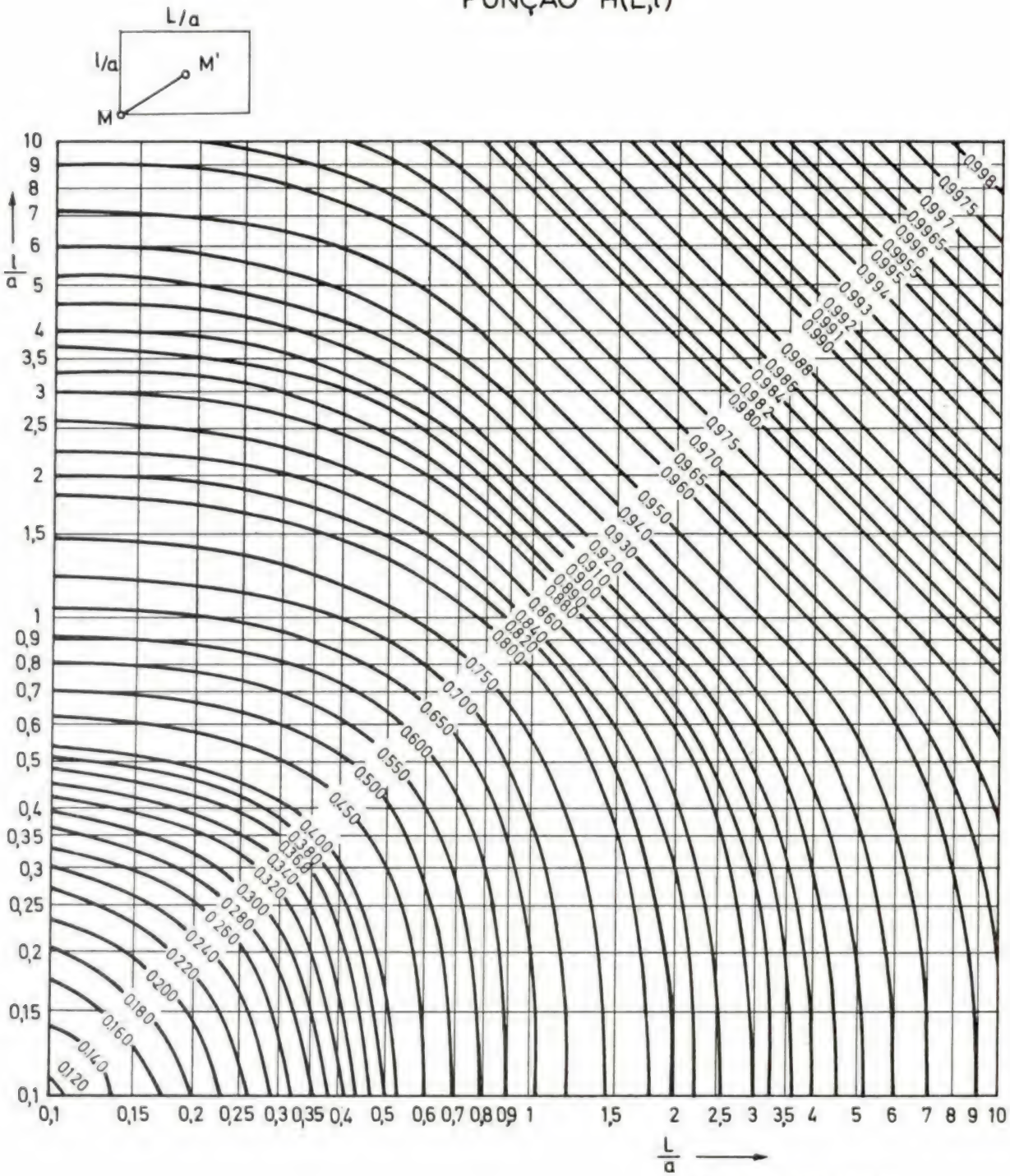
FUNÇÃO X(L;l)



Seg. A.JOURNEL (9)

ABACO N. 3

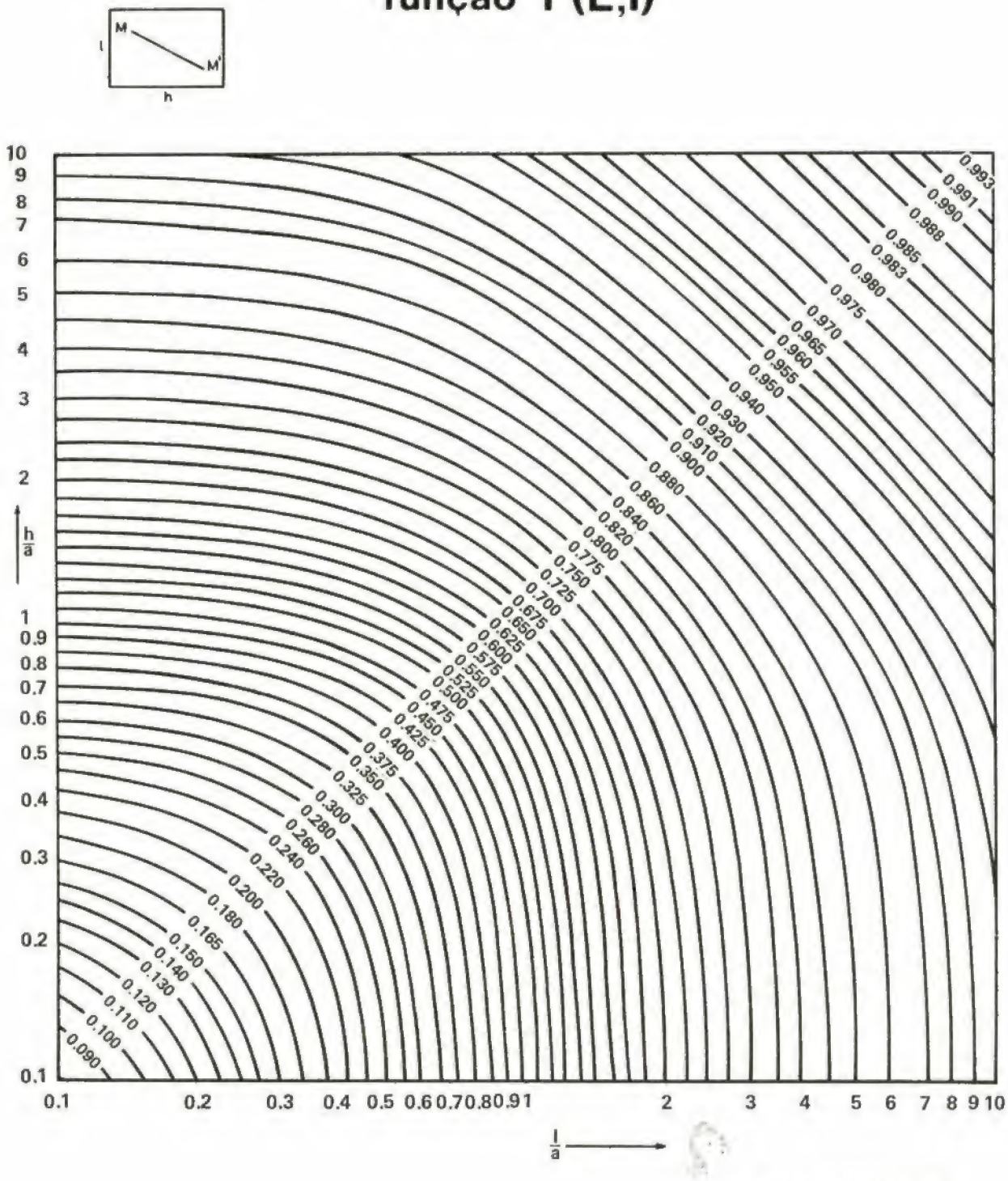
FUNÇÃO H(L;l)



Seg. A JOURNEL (9)

ABACO N. 4

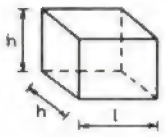
função F(L,l)

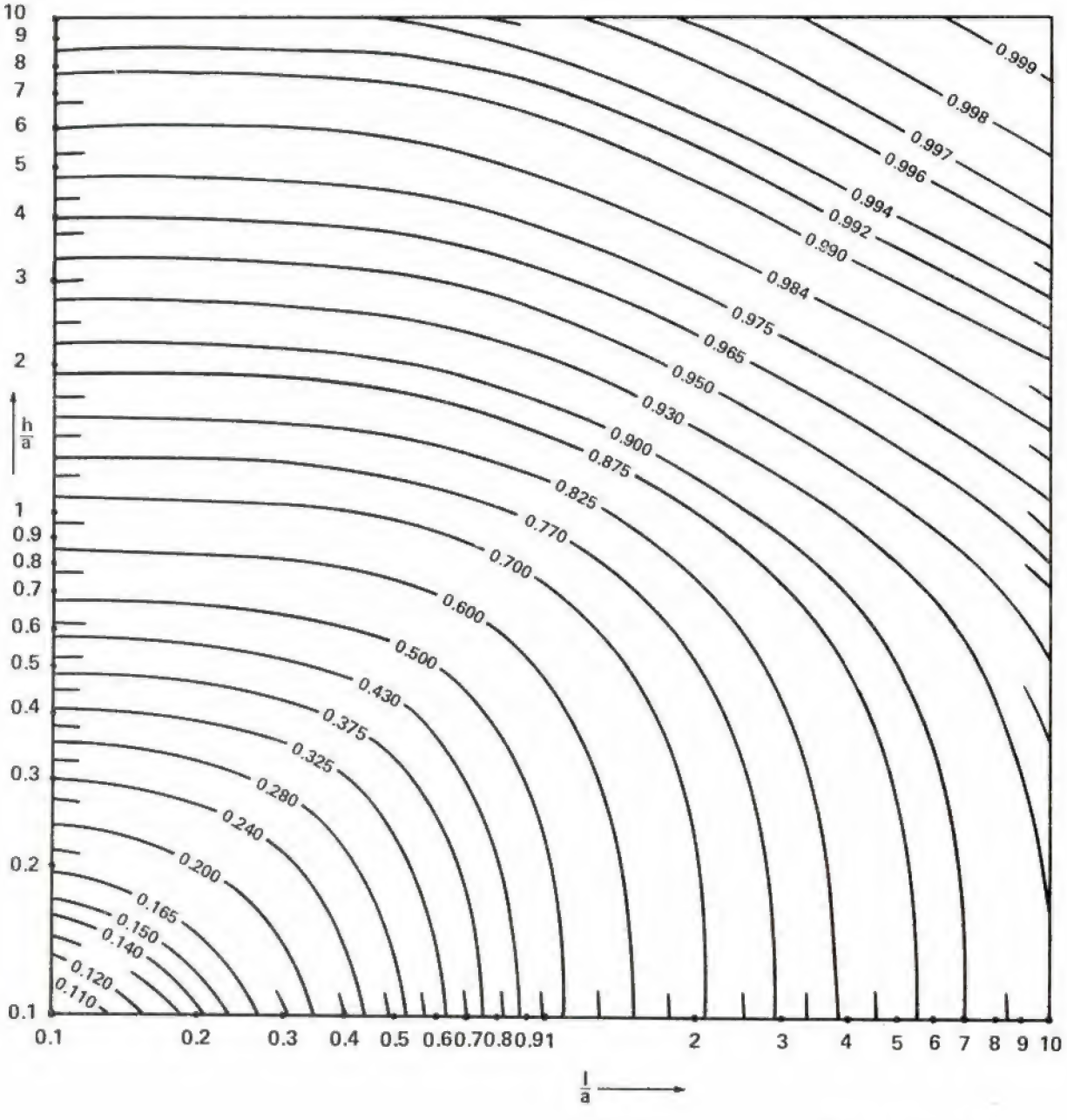


Seg. A. JOURNEL (9)

ABACO N. 5

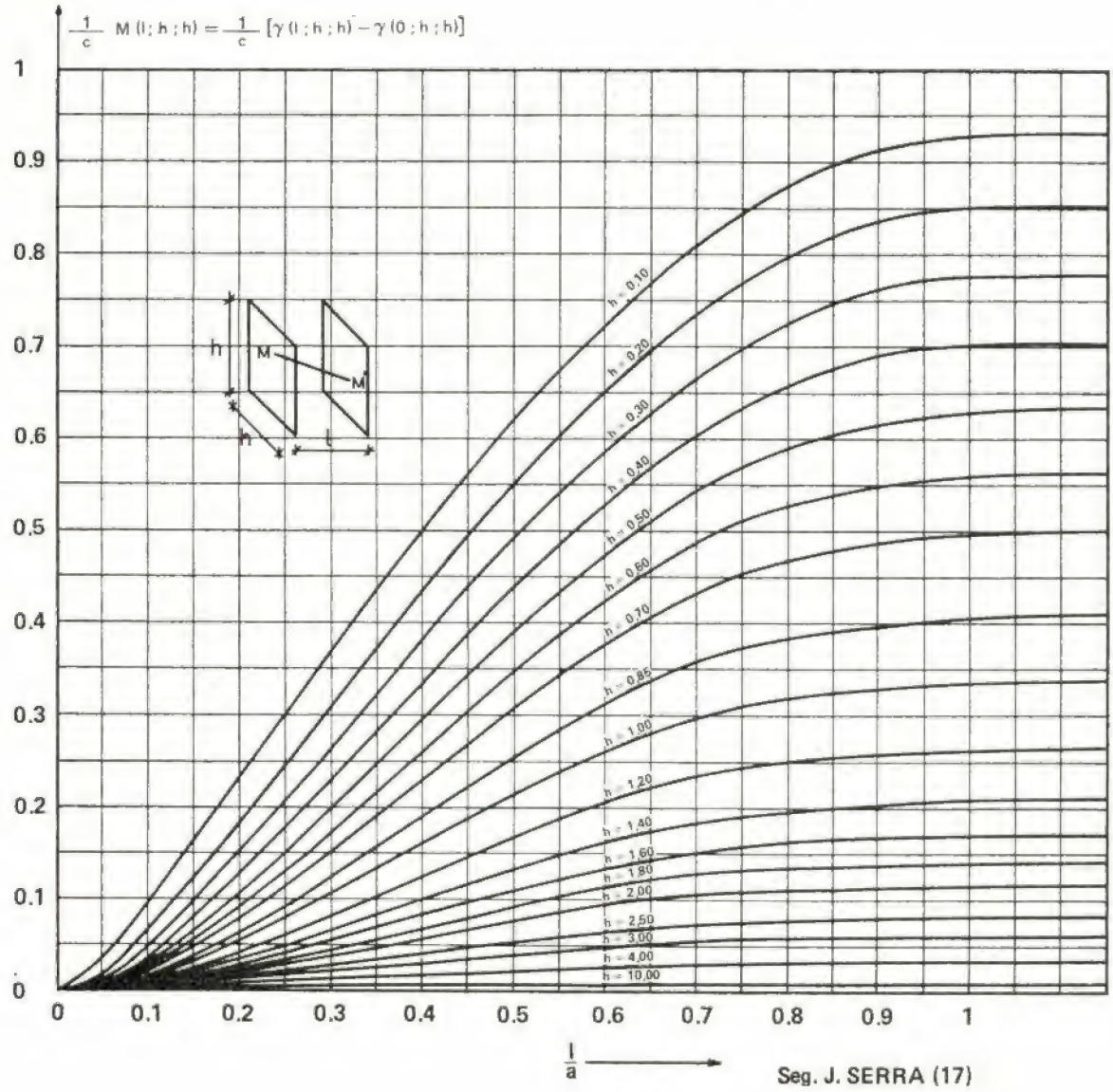
função F(l,h,h)





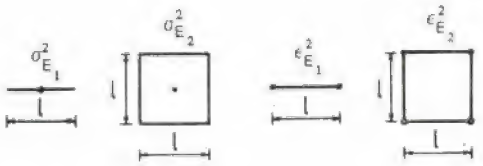
Seg. M. DAVID (5)

ABACO N. 6

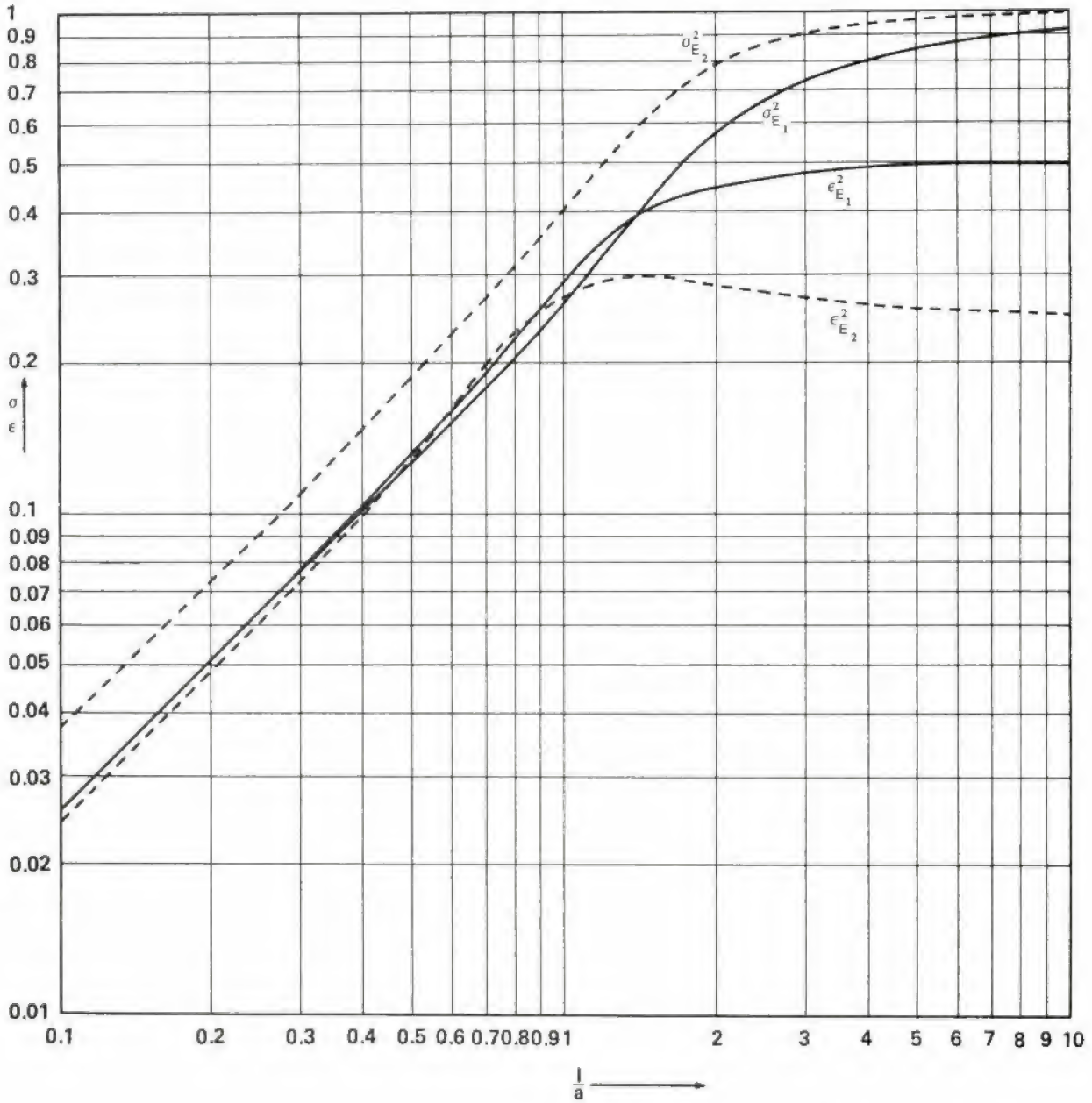


Seg. J. SERRA (17)

ABACO N. 7

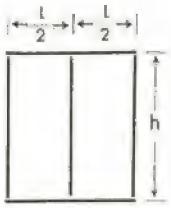


variâncias de extensão diversas

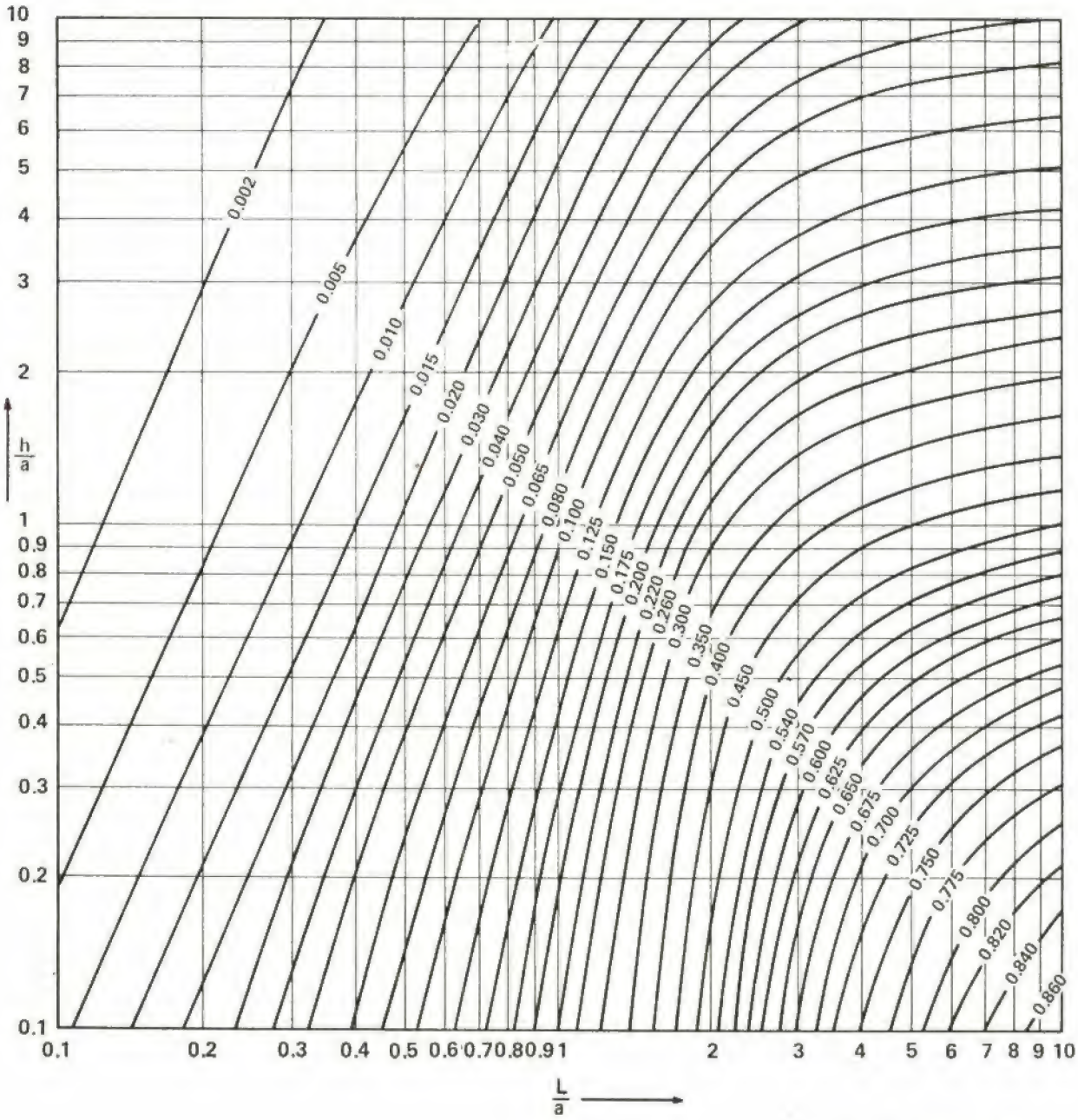


Seg. A. JOURNEL (9)

ABACO N. 8

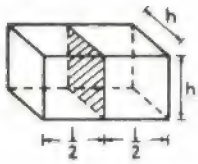


variância de extensão

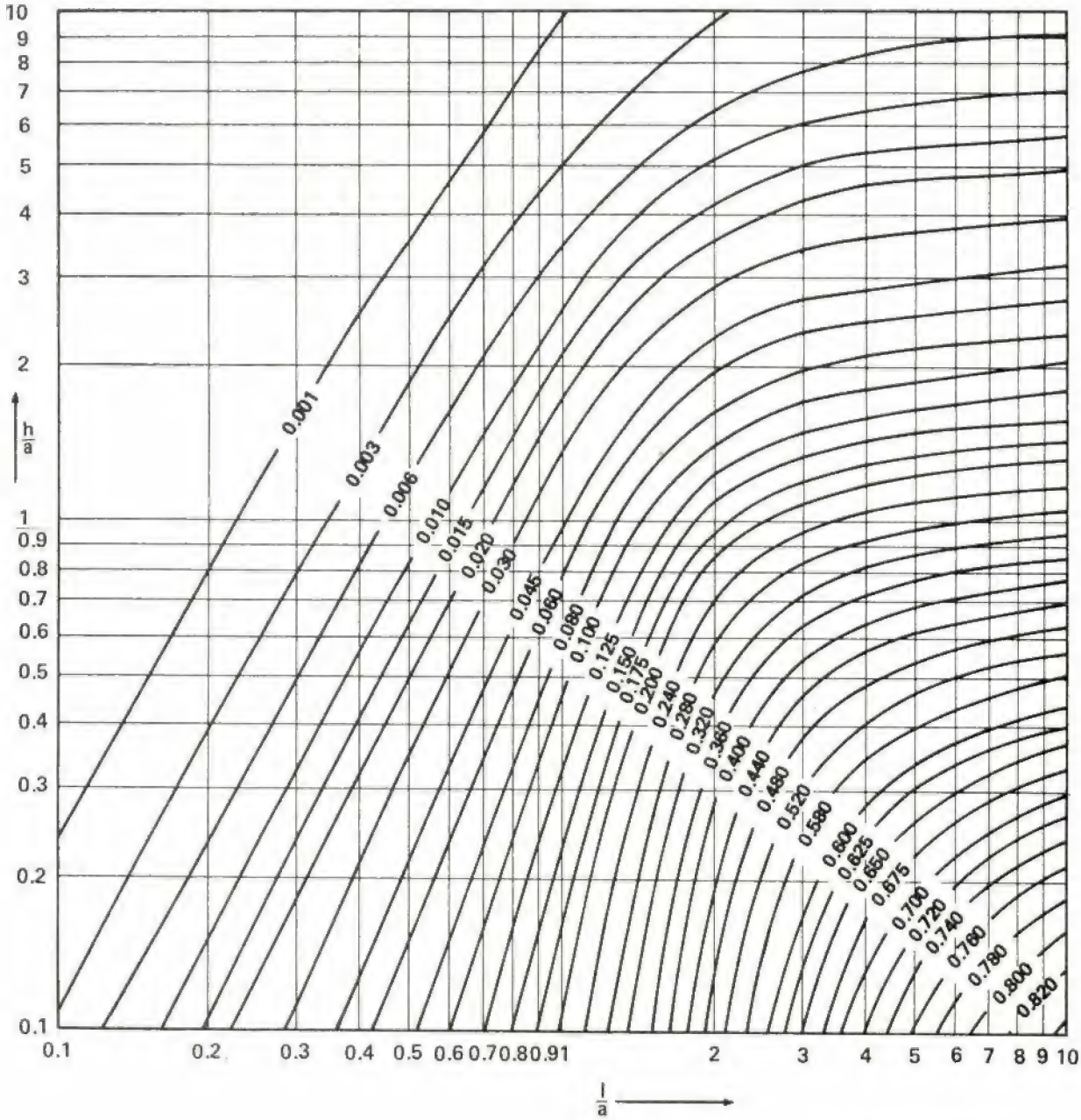


Seg. M. DAVID (5)

ABACO N. 9



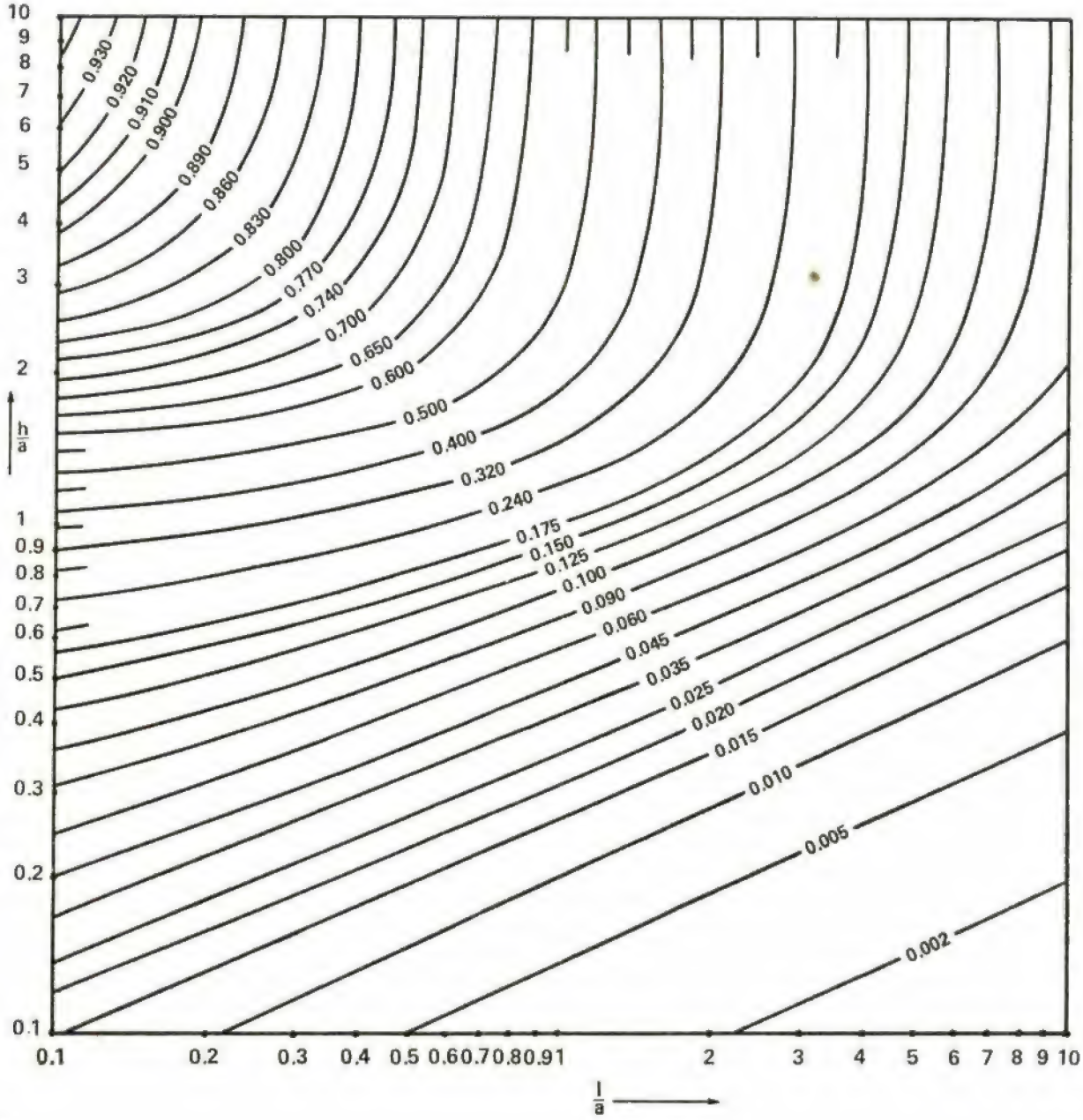
variância de extensão



Seg. A. JOURNEL (9)

ABACO N. 10

variância de extensão



Seg. M. DAVID (5)

f) *Cálculo das variâncias de estimação elementares.*

A escrita das variâncias de estimação utilizando as funções auxiliares é imediata. Assim, apresentam-se alguns exemplos de uso corrente:

— *A 1 dimensão:*

Estimação do segmento L por uma amostra pontual central:

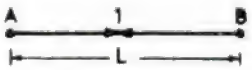
$$\sigma_E = 2\ \bar{\gamma}(0,\overline{AB}) - \bar{\gamma}(\overline{AB},\overline{AB}) - \bar{\gamma}(0) = 2\ \chi\left(\frac{L}{2}\right) - F(L)$$

Estimação do segmento L pela média de duas amostras pontuais extremas:

$$\sigma_E = 2\ \chi(L) - F(L) - \frac{1}{2}\gamma(L)$$

Estimação do segmento L por um segmento l central:

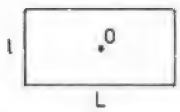
$$\sigma_E = 2\ \chi\left(\frac{L}{2}\right) - F(L) - F(l)$$



Estimação do segmento L por dois segmentos l extremos:

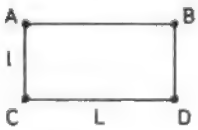
$$\sigma_E^2 = 2\ \chi(L) - F(L) - \frac{1}{2}\left[F(l) + \gamma(l)\right]$$

— *A 2 dimensões:*



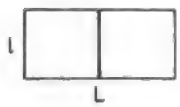
Estimação do rectângulo (L, l) por uma amostra pontual central:

$$\sigma_E = 2\ H\left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}\right) - F(L, l)$$



Estimação do rectângulo (L, l) pela média de 4 amostras pontuais nos vértices:

$$\sigma_E = 2\ H(L, l) - F(L, l) - \frac{1}{4}\left[\gamma(L) + \gamma(l) - \gamma\left(\sqrt{L^2+l^2}\right)\right]$$



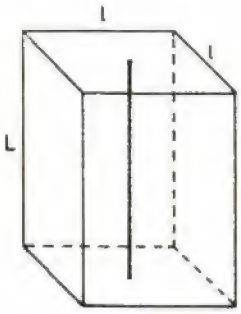
Estimação do rectângulo (L, l) pela sua mediana l:

$$\sigma_E = 2\ \chi\left(\frac{L}{2}, l\right) - F(L, l) - F(l)$$

Estimação do rectângulo (L, l) pela média dos seus dados l:

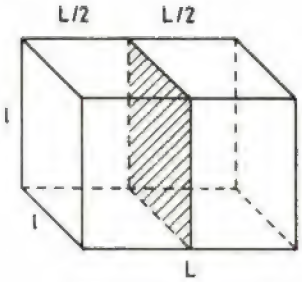
$$\sigma_E = 2\ \chi(L, l) - F(L, l) - \frac{1}{2}\alpha(L, l) - \frac{1}{2}F(l)$$

— *A 3 dimensões:*



Estimação do paralelipípedo (L, l, l) pelo eixo L:

$$\sigma_E = 2\ H\left(L, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) - F(L, l, l) - F(L)$$



Estimação do paralelipípedo (L, l, l) pelo plano mediano (l, l):

$$\sigma_E = 2\ \chi\left(\frac{L}{2}, l, l\right) - F(L, l, l) - F(l, l)$$

Nos ábacos n.os 7 a 10 estão tabeladas algumas destas variâncias de estimação elementares.

4.4 — Princípios de aproximação para a composição das variâncias de estimação elementares

Como já se referiu, admitem-se geralmente um certo número de hipóteses, ou princípios de aproximação em Geoestatística, com o objectivo de simplificar os cálculos sem lhes diminuir significativamente a precisão.

Um desses princípios utilizados na estimação geoestatística é o *princípio de independência dos erros elementares*, que permite a sua composição directa. Consiste em reduzir o erro global $(Z_v - Z^*)$ de uma estimação a uma soma de erros parciais elementares considerados como independentes entre si e cuja variância é simples de calcular.

Assim, seja o erro global: $(Z_v - Z^*) = \sum_i \lambda_i\ (Z_i - Z_i^*)$, em que λ_i é a função de ponderação.

A variância de estimação global será:

$$\sigma_E^2 = E[Z_v - Z^*]^2 = \sum \lambda_i^2 E[Z_i - Z_i^*] + \sum_{i \neq j}\sum \lambda_i\ \lambda_j\ E[(Z_i - Z_i^*)\ (Z_j - Z_j^*)]$$

Se os erros $(Z_i - Z^*_i)$, $(Z_j - Z_j^*)$, com $i \neq j$, poderem ser considerados como independentes, todos os termos rectangulares (covariâncias) se anulam, e fica somente:

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\ E[Z_i - Z_i^*]^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\ \sigma_{Ei}^2$$

As configurações das estimações elementares de Z_i por Z_i^* serão escolhidas suficientemente simples para que se possam calcular directamente as variâncias σ_{Ei}^2 por meio de fórmulas gerais ou com o auxílio das funções auxiliares ou de ábacos.

Pode-se avaliar o grau de aproximação da hipótese de independência calculando os $N(N-1)$ termos rectangulares tais que:

$$E[(Z_i - Z_i^*)\ (Z_j - Z_j^*)] = E[Z_i\ Z_j] - E[Z_i\ Z_j^*] - E[Z_j\ Z_i^*] + E[Z_i^*\ Z_j^*] \qquad (\text{com } i \neq j)$$

pois cada um dos termos deste desenvolvimento exprime-se em função dos valores médios do variograma característico da regionalização estudada.

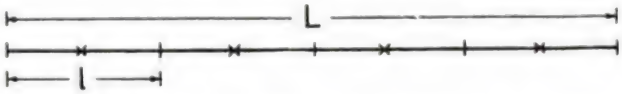
Distinguem-se dois tipos de composição de erros elementares:

— os que provêm de uma mesma configuração *(composição directa)*
— os que provêm de configurações diferentes *(composição de termos)*.

a) *Composição directa de erros elementares:*

Seja, no espaço a 1 dimensão, uma linha L reconhecida por N pontos regularmente espaçados de 1.

— *Dispositivo centrado:*



A linha L é constituida por N segmentos l reconhecidos cada um por uma informação (amostra) central:

$$L = \sum_{i=1}^{N} l_i$$

A variância da estimação elementar do teor médio Z_{li} de cada segmento l_i pela informação central $Z(x_i)$ é dada pela expressão geral:

$$\sigma_l^2 = 2\ \bar{\gamma}(l_i, x_i) - \bar{\gamma}(x_i, x_i) - \bar{\gamma}(l_i, l_i) = 2\ \chi\left(\frac{l}{2}\right) - F(l) \qquad (\forall_i)$$

O teor médio Z_l de L será dado pela média dos teores Z_{li} em cada segmento l_i:

$$Z_L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z(x_i)$$

E o seu estimador por:

$$\overset{*}{Z}_L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z(x_i)$$

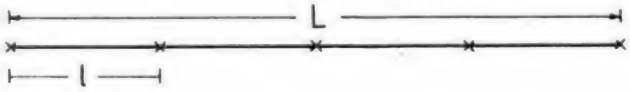
A variância da estimação global de Z_L pela média aritmética das N amostras $Z(x_i)$ vem:

$$\sigma_E^2 = E[\overset{*}{Z}_L - Z_L]^2 = \frac{1}{N^2}\ E\{\sum_i [Z_{li} - Z(x_i)]\ \}$$

Supondo os erros de estimação elementeares $(Z_{li} - Z(x_i))$, $(Z_{lj} - Z(x_j))$ como independentes, $\forall\ i \neq j$, vem:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N^2} \sum_i E[Z_{li} - Z(x_i)]^2 = \frac{1}{N}\ \sigma_l^2$$

— *Dispositivo fechado:*



A mesma linha L pode também ser estimada por $(N+1)$ amostras em dispositivo fechado (segmentos amostrados nos extremos).

Neste caso, o teor médio Z_{li} de cada segmento l_i é reconhecido pela média dos teores dos seus extremos:

$$\overset{*}{Z}_{li} = \frac{1}{2}\ [Z(x_i) + Z(x_{i+1})]$$

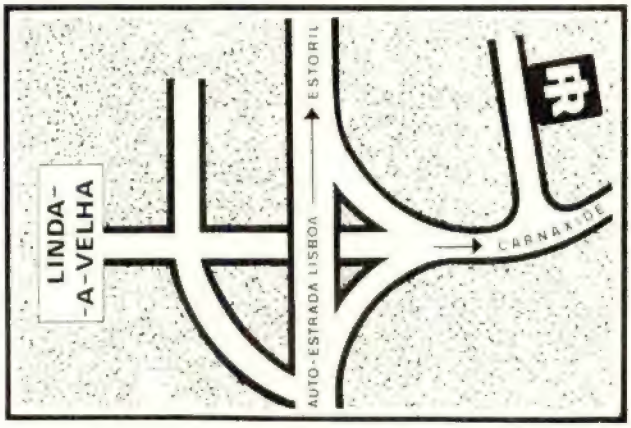
Então, o estimador do teor médio Z_L de L vem:

$$\overset{*}{Z}_L = \frac{1}{N} \sum_{i+1}^{N} \overset{*}{Z}_{li} = \frac{1}{N}\ [\frac{Z(x_1)}{2} + Z(x_2) + \ldots + Z(x_N) + \frac{Z(X_{N+1})}{2}]$$

Plano

Ingersoll-Rand

NOVAS INSTALAÇÕES



A PARTIR DE 1 DE JUNHO

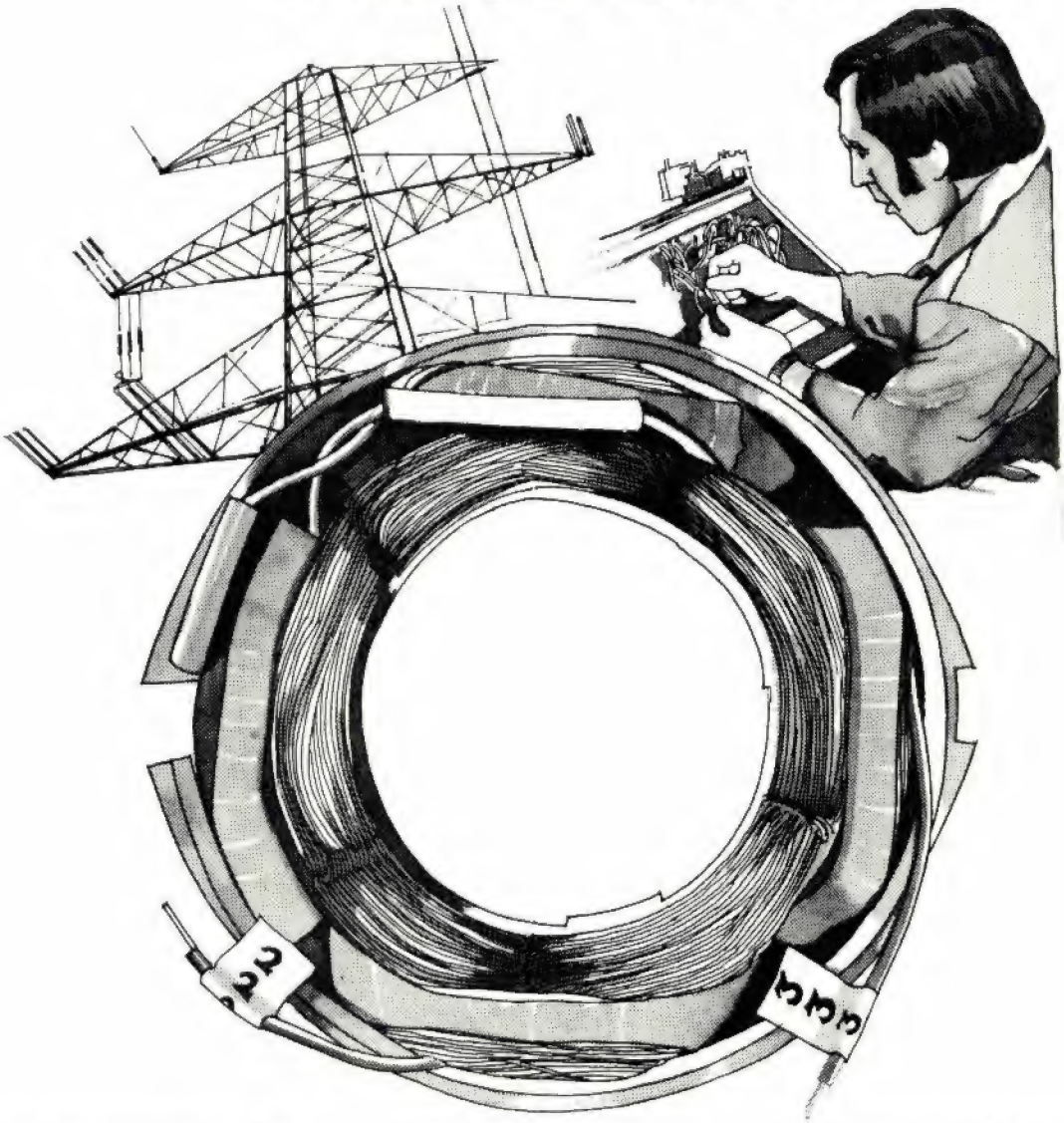
estamos instalados na nossa nova sede em **Carnaxide**.

Fixe o novo endereço e os novos telefones.

Rua A — Estrada do Carrascal, 9-A
Carnaxide – Telefs: 218 10 16 (PPCA)

Ingersoll-Rand

Fitas auto-adesivas Tesa para a indústria eléctrica e electrónica.



As fitas auto-adesivas Tesa para a indústria eléctrica e electrónica oferecem todas as vantagens das fitas, que foram estudadas para um fim específico. E nas mais diversas finalidades: para isolar, ligar, fixar e referenciar. Elas consoante a sua aplicação satisfazem as especificações técnicas referentes a isolamento térmico, resistência em superfícies de verniz, inalterabilidade às variações atmosféricas e ao ataque de lexívias ou ácidos. Tesaflex, Tesaband, Tesakrepp, Tesafilm, Tesamoll e Tesafix, são fitas auto-adesivas Tesa indispensáveis na indústria eléctrica e electrónica. Uma gama completa; cada variedade um sem número de aplicações para um sem número de indústrias.

tesa

DEPARTAMENTO INDÚSTRIA

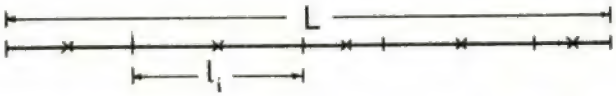
Tesa, sempre a solução do seu caso.

PARA MAIS INFORMAÇÕES CONSULTE O DEPARTAMENTO TESA DA BEIERSDORF PORTUGUESA, LDA.
Est. de Barcarena – Queluz de Baixo Tel. 95 61 71 ou Delegação no Norte – R. Gonçalo Sampaio, 164-178 – Porto Tel. 69 11 53/4/5

Mas agora, dois segmentos contíguos l_i e l_{i+1} têm em comum uma mesma amostra, pelo que já não é possível considerar os seus erros de estimação elementares como independentes.

Todavia, demonstra-se que é possível, com boa aproximação, assimilar um dispositivo fechado com $(N+1)$ pontos a um dispositivo centrado com N pontos, desde que $N \geqslant 5$. Esta regra prática estende-se a dispositivos fechados a 2 ou 3 dimensões.

— *Dispositivo aleatório:*



Considere-se agora a mesma linha L reconhecida por N pontos em dispositivo centrado mas de malha irregular $(l_i \neq l_j)$, sendo cada um dos segmentos l_i estimado pela sua amostra central $Z(x_i)$.

Então, o teor médio em L será: $Z_L = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N} l_i \, Z_{li}$

E o seu estimador: $Z_L^* = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N} l_i \, Z(x_i)$

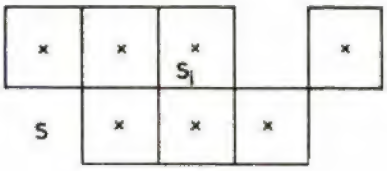
A composição directa dos erros de estimação elementares $(Z_{li} - Z(x_i))$ dá:

$$\sigma_E^2 = E[Z_L - Z_L^*] = \frac{1}{L^2} \sum l_i^2 \, E[Z_{li} - Z(x_i)]^2 = \frac{1}{L^2} \sum l_i^2 \, \sigma_{li}^2$$

É, contudo, necessário que a malha seja aleatória (pura ou estratificada), isto é, não esconda uma implantação preferencial das amostras.

— *Dispositivo a 2 dimensões:*

Este princípio de composição directa de estimação elementar estende-se a configuraçõs a 2 dimensões:



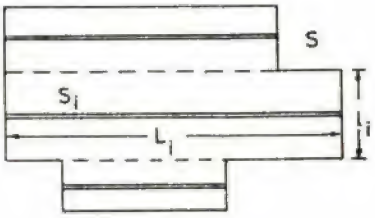
Seja, por exemplo, a estimação do teor médio de uma superfície poligonal S constituida por N áreas elementares s_i, reconhecidas cada uma por amostra central.

Com raciocínio idêntico aos anteriores, obtêm-se:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^{N} S_i^2 \, \sigma_{si}^2$$

Sendo $s_i = s_j$, vem:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} \sigma_s^2$$



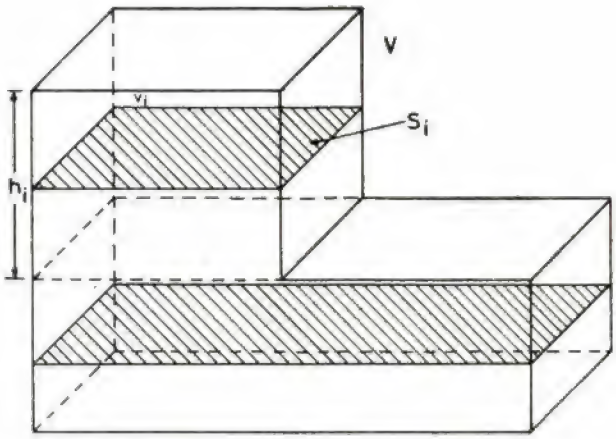
Seja ainda, por exemplo, a estimação do teor médio numa superfície S constituida pela reunião de N rectângulos de área $s_i = L_i \, l_i$, cada um deles reconhecido pela sua mediana L_i. Então:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{S^2} \sum_i s_i^2 \, \sigma_{si}^2$$

Sendo $l_i = l_j$, vem:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{(\sum_i L_i)^2} \sum_i L_i^2 \, \sigma_{si}^2$$

— *Dispositivo a 3 dimensões:*



Para configurações a 3 dimensões, o princípio aplica-se de modo idêntico: por exemplo, para um volume V constituído pela reunião de N volumes $v_i = S_i\ h_i$, cada um deles reconhecido pela sua secção mediana, será:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{V^2} \sum_i v_i^2\ \sigma_{vi}^2$$

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{(\sum_i S_i)^2} \sum_i S_i^2\ \sigma_{vi}^2$$

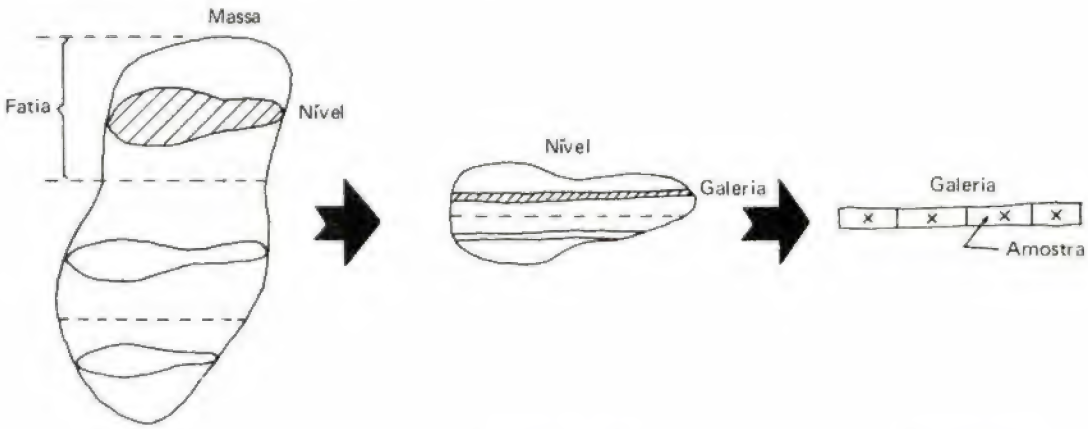
A aproximação, neste caso, consistiu em supôr os erros de estimação elementares de cada volume como independentes entre si.

b) *Composição de termos*

A informação disponível para o reconhecimento de um fenómeno a 3 dimensões está, frequentemente, concentrada sobre linhas preferenciais (sondagens, grupos de sanjas, galerias, chaminés, etc., numa jazida mineral), ou sobre planos (os diferentes níveis de implantação das galerias, por exemplo).

A estimação global do teor médio de um volume (uma massa mineral) pode ser decomposta, por exemplo, em três etapas, correspondendo aos três termos da variância de estimação:

— Estimação das galerias pelo conjunto das amostras (rouços) disponíveis: é o *termo de linha.*
— Estimação de cada nível pelas galerias (supostas perfeitamente reconhecidas): é o *termo de plano ou de secção.*
— Estimação de cada «fatia» da massa pelo seu plano médio (nível), também suposto perfeitamente reconhecido: é o *termo de fatia ou de camada.*



Termo de Fatia σ_f^2 — Termo de Plano σ_p^2 — Termo de linha σ_l^2

Se se admitirem os três erros de estimação, correspondentes a estas três etapas, considerados como independentes, a variância de estimação global da massa é constituída pela soma de três termos:

$$\sigma_E^2 = \sigma_l^2 + \sigma_p^2 + \sigma_f^2$$

Para cada um dos termos, e atendendo ao que já se referiu, será:

$$\sigma_l^2 = \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2$$

(para N amostras totais regularmente espaçadas nas galerias, sendo $\sigma_{e_i}^2$ a variância de estimação elementar do ponto central ao segmento e_i)

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{j=1}^{M} s_j^2 \sigma_{s_j}^2$$

(σ_{sj}^2 é a variância de estimação do rectângulo s_j pela sua mediana l_j, suposta perfeitamente reconhecida)

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{k=1}^{Q} v_k^2 \sigma_{v_k}^2$$

(σ_{vk}^2 é a variância de estimação do paralelipípedo v_k pelo seu plano meridiano s_k, suposto perfeitamente reconhecido)

Esta composição de termos apresentada pode, evidentemente, ser aplicada de modo análogo a outras configurações.

4.5 — O problema do suporte: regularização e acumulação

Uma V. R. é sempre definida num certo *suporte* caracterizado pelo seu volume, forma e orientação. Portanto, nunca podemos conhecer, na prática, os valores pontuais $z(x_i)$ das variáveis estudadas, mas sim valores regularizados por uma certa função de ponderação; por exemplo, o valor médio $z_v(x)$ no volume v amostrado:

$$Z_v(X) = \frac{1}{v} \int_v z(y)\, dy$$

O problema prático que se põe é o de, a partir do *variograma experimental regularizado* (o único a que temos acesso), reconstituir o *variograma pontual*, visto ser este que deve entrar no cálculo das variâncias e covariâncias.

Em certos casos, o suporte da regularização é bastante pequeno, podendo considerar-se pontual, e então é possível trabalhar directamente sobre o variograma regularizado. Quando tal não for possível, terá de se trabalhar sobre variáveis regularizadas.

Define-se a *regularizada* de uma função $z(x)$ por uma função de ponderação $p(y)$, como o *produto de convolução* (*):

$$Z_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(x+y)\, p(y)\, dy = z * \check{p}$$

em que: $\check{p}(y) = p(-y)$ é a transposta de $p(y)$.

O valor médio precedente $z_v(x)$ corresponde à função de ponderação proporcional à *indicatriz geométrica* do volume v:

$$p(y) = \frac{1}{v} k(y)$$

com:

$$k(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in v \\ 0 & \text{se } y \notin v \end{cases}$$

Pode-se interpretar $z_p(x)$ como uma realização particular da F. A. $Z_p(x)$, dita regularizada da F. A. $Z(x)$ pela função de ponderação p.

a) *Variograma regularizado:*

Se $Z(x)$ é uma F. A. estacionária de 2.ª ordem e admite a covariância $C(h)$, a regularizada $Z_p(x)$ é também F. A. estacionária de 2.ª ordem e admite a covariância:

(*) O produto de convolução de duas funções f e g é definido por:

$$f * g = \int f(y)\, g(x-y)\, dy$$

$$C_p(h) = E[Z_p(x) \,.\, Z_p(x+h)] =$$

$$= E\left[\int Z(x+y) \,.\, p(y)\, dy \,.\, \int Z(x+h+w) \,.\, p(w)\, dw\right] =$$

$$= \int\int E[Z(x+y) \,.\, Z(x+h+w)] \,.\, p(y) \,.\, p(w)\, dy\, dw$$

Fazendo a mudança de variáveis: $w = y + u$, teremos:

$$C_p(h) = \int\int C(h+u) \,.\, p(y) \,.\, p(y+u)\, dy\, du =$$

$$= \int C(h+u)\, du \,.\, \int p(y+u) \,.\, p(y)\, dy$$

Mas este 2.º integral é, por definição, o *covariograma transitivo* (*) da função de ponderação $p(y)$; logo:

$$C_p(h) = \int C(h+u) \,.\, P(u)\, du = C * \check{P} = C * P$$

Pois:

$$\check{P} = \overbrace{(p * \check{p})}^{\cdot\cdot} = \check{p} * p = p * \check{p} = P$$

Isto é, a covariância da regularizada Z_p obtém-se regularizando a covariância inicial pelo covariograma transitivo da função de ponderação.

O variograma regularizado deduz-se então de $C_p(h)$ pela relação clássica:

$$\gamma_p(h) = C_p(O) - C_p(h)$$

Pode-se também deduzir directamente $\gamma_p(h)$ do variograma pontual $\gamma(h)$, substituindo na expressão anterior e obtendo:

$$\gamma_p(h) = \int \gamma(x+h) \,.\, P(x)\, dx - \int \gamma(x) \,.\, P(x)\, dx$$

Ou, em notação simbólica: $\gamma_p = \gamma * P - A$

Sendo a constante A determinada pela condição $\gamma_p(O) = O$.

Na prática, a ponderação p corresponde geralmente a uma média sobre o volume v do suporte, pelo que o variograma regularizado se pode interpretar como a variância de estimação da amostra $v(x)$ pela amostra $v(x+h)$:

$$\gamma_v(h) = \frac{1}{2}\, E[Z_v(x+h) - Z_v(x)]^2$$

Pode-se então usar a fórmula, mais prática, do cálculo da variância de estimação de uma média por outra:

$$\gamma_v(h) = \bar{\gamma}(v, v_{+h}) - \bar{\gamma}(v, v)$$

em que $\bar{\gamma}(v, v_{+h})$ representa o valor médio do variograma pontual $\gamma(x-y)$ quando os dois pontos de apoio percorrem, independentemente um do outro, um o volum v e o outro o seu transladado de $h(v_{+h})$.

Note-se que, para distâncias $h \gg v$, vem: $\bar{\gamma}(v, v_{+h}) \simeq \bar{\gamma}(h)$, donde:

$$\bar{\gamma}_v(h) \simeq \gamma(h) - \bar{\gamma}(v, v)$$

(*) Define-se o covariograma transitivo de uma função $p(y)$ como:

$$P(u) = \int p(y) \,.\, p(y+u)\, dy.$$

Quer dizer, para distâncias $h \gg v$, o comportamento pontual do variograma conserva-se, a menos de uma translação para baixo de valor:

$$\bar{\gamma}(v, v) = F(v)$$

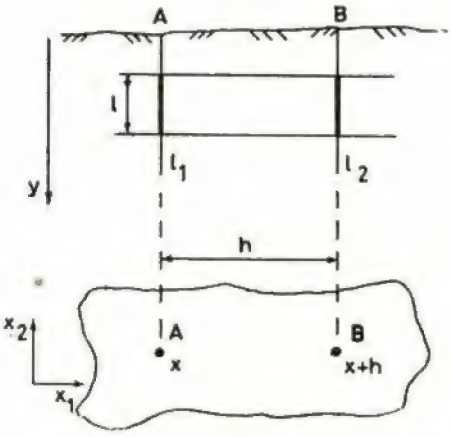
O alcance é aumentado de: $a_v = a + \dim(v)$

Demonstra-se também (V. por exemplo F. MUGE et al. (15)) que a constante de pepita C_o se regulariza na razão inversa do volume de regularização, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, h \gg a \\ \forall\, v \gg a \end{array}\right\} \quad \gamma_v(h) = \frac{C_o}{v} \qquad \gamma_v(o) = O$$

b) *Acumulação*

Designa-se por *acumulação* a regularização correspondente à média calculada sobre possança constante. Considere-se, por exemplo, o caso corrente na prática de sondagens verticais, sendo $Z(y)$ a F. A. pontual com variograma $\gamma(h)$ e $Z_l(x)$ o teor médio no comprimento l (constante) de um troço de sondagem:



$Z_l(x) = \frac{1}{l} \int_o^l Z(y)\, dy$; x representa as coordenadas (x_1, x_2) no plano horizontal da sondagem, e y a coordenada vertical.

O variograma acumulado $\gamma_l(h)$ numa direcção horizontal qualquer $\vec{h}$ escreve-se:

$$\gamma_l(h) = \frac{1}{2} E[Z_l(x) - Z_l(x+h)]^2 = \bar{\gamma}(l, l_h) - \bar{\gamma}(l, l)$$

O símbolo $\bar{\gamma}(l, l_h)$ designa o valor médio do variograma pontual $\gamma(h)$ entre os dois lados paralelos de comprimento l (os troços das sondagens).

Se o variograma pontual $\gamma(h)$ é isótropo no espaço a 3 dimensões, o variograma horizontal acumulado $\gamma_l(h)$ é também isótropo no espaço a 2 dimensões e tem por expressão:

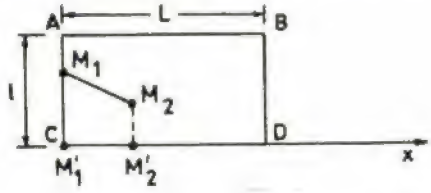
$$\gamma_l(h) = \frac{2}{l^2} \int_o^l (l-y)\ \gamma(\sqrt{h^2+y^2})\ dy - \frac{2}{l^2} \int_o^l (l-y)\ \gamma(y)\ dy = \bar{\gamma}(l_1, l_2) - \bar{\gamma}(l, l) = \alpha(h, l) - \alpha(o, l)$$

Na prática, desde que $h > l$, pode-se assimilar o variograma acumulado $\gamma_l(h)$ ao variograma pontual $\gamma(h)$ transladado para baixo de um valor igual à diferença entre os patamares (no caso de esquemas de transição), isto é: $\gamma_l(h) \simeq \gamma(h) - F(l)$.

Note-se que é necessário distinguir o variograma regularizado (acumulado) por acumulação sobre uma possança l, do variograma regularizado por troços de comprimento l empilhados, embora o suporte da regularização seja o mesmo nos dois casos («carottes» de comprimento l, por exemplo). No caso da acumulação, os dois segmentos l e l_h são paralelos, enquanto no caso da regularização eles estão alinhados.

Finalmente, é de referir que a acumulação permite deduzir as funções auxiliares a (n+1) dimensões das respectivas expressões a n dimensões.

Por exemplo: seja o rectângulo $\overline{ABCD}$, no qual se define a função auxiliar: $\chi(L, l) = \frac{1}{L} \int_o^L \alpha(x, l)\, dx$, sendo α calculado sobre valores pontuais.



Se projectarmos a figura no eixo dos xx, realizamos uma acumulação sobre a possença l. A expressão de $\chi_p(L)$, calculada agora sobre valores acumulados, é:

$$\chi_p(L) = \frac{1}{L} \int_o^L \gamma_p(x)\, dx = \frac{1}{L} \int_o^L \alpha(x, l) dx - \frac{1}{L} \int_o^L \alpha(O, l) dL = \\ = \chi(L, l) - \alpha(o, l)$$

De modo análogo se definem as correspondências (por regularização R):

$$\gamma(L) \overset{R}{\frown\!\!\!\rightarrow} \alpha(L, l) - \alpha(0, l)$$

$$\chi(L) \overset{R}{\frown\!\!\!\rightarrow} \chi(L, l) - \chi(o, l)$$

$$F(L) \overset{R}{\frown\!\!\!\rightarrow} F(L, l) - F(o, l)$$

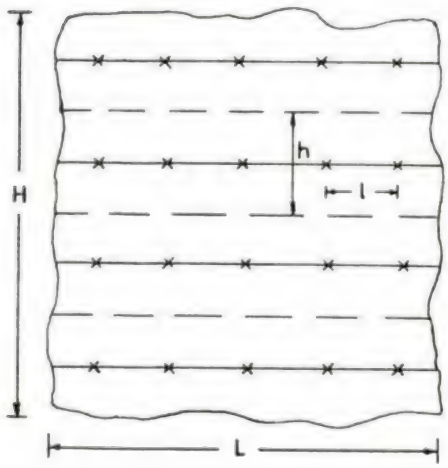
Para 3 dimensões, o processo de correspondência é similar.

5 — APLICAÇÕES

5.1. Aplicação à optimização de um reconhecimento

Uma aplicação interessante do conceito de variância de estimação é na optimização de campanhas de reconhecimento de jazidas minerais: conhecidos os custos unitários de amostragem, determinar o plano de amostragem que conduz ao menor erro para dado custo global fixo, ou então o que implica a menor despesa total para dado erro previamente fixado.

Um exemplo simples permite concretizar este problema: suponha-se que se pretende reconhecer um filão estreito sub-vertical, de configuração aproximadamente rectangular L×H, por galerias de nível amostradas descontinuamente por rouços traçados a intervalos regulares.



Existe uma verba global $P = 20 \times 10^6$ unidades monetárias alocada à campanha de reconhecimento, e computam-se em $p_g = 5000$ unidades e $p_r = 500$ unidades os custos do metro de galeria e da abertura do rouço, respectivamente. Sejam: $L = 1000$ m, $H = 300$ m.

Por uma análise estrutural previamente feita na região, sabe-se que a V. R. em estudo (o teor, por exemplo) segue um esquema de tipo esférico isótropo, com alcance $a = 36$ m.

Pretende-se então optimizar o plano de amostragem, determinando o afastamento h entre galerias e l entre amostras que conduzem ao menor erro de estimação do filão.

Admitindo o princípio de composição dos termos de linha e de plano, a variância de estimação total será dada por:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}\sigma_l^2 + \sigma_p^2\right) = \frac{h}{H}\left(\frac{1}{L}\sigma_l^2 + \sigma_p^2\right)$$

em que σ_l^2 é a variância de estimação de um segmento l pela sua amostra central, σ_p^2 a variância de estimação do rectângulo l . h pelo seu segmento mediano l, $m = H/h$ o número de galerias a traçar, e $n = L/l$ o número de amostras a colher por galeria.

Por outro lado, o custo total dos trabalhos de reconhecimento será:

$$P = m\,L\,p + m\,n\,p_r = \frac{H}{h}\,L\,\left(p_g + \frac{1}{l}\,p_r\right)$$

condição esta que é necessário respeitar.

Como se sabe do cálculo das variações, o mínimo de σ_E^2 atendendo ao constrangimento P fixo é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial l}\,(\sigma_E^2 + \lambda\,P) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial h}\,(\sigma_E^2 + \lambda\,P) = 0 \\[2ex] P \\ \forall\ \lambda \text{ (multiplicador de Lagrange)} \end{cases}$$

Designando por r a relação p_r/p_g, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} \frac{h}{L}\frac{\partial}{\partial l}(l \cdot \sigma_l^2) - \lambda \frac{r}{h\,l^2} = O \\ \frac{l}{LH}\sigma_l^2 + \frac{1}{H}\sigma_p^2 + \frac{h}{H}\frac{\partial}{\partial h}\sigma_p^2 - \lambda \frac{1}{h^2}(1 + \frac{r}{l}) = O \\ P = \frac{H\,L}{h} p_g (1 + \frac{r}{l}) \end{cases}$$

Ou, eliminando λ:

$$\begin{cases} L\frac{\partial}{\partial h}(h \cdot \sigma_p^2) = l^2 \frac{\partial}{\partial l}\sigma_l^2 + \frac{l^2}{r}\frac{\partial}{\partial l}(l \cdot \sigma_l^2) \\ h = \frac{H\,L}{P} p_g (1 + \frac{r}{l}) \end{cases}$$

Em ambas as equações, o 1.º membro só depende de h e o 2.º só de l, pelo que é possível achar a intercepção das duas curvas no plano [h, l] que fornece o par de valores óptimo procurado.

O cálculo analítico é simples, dado que se conhece o modelo do variograma válido para a regionalização. Admitindo, como hipótese razoável, que $l < a$ e $h > a$, as variâncias de estimação escrevem-se:

$$\sigma_l^2 = 2\,\chi\,(\frac{l}{2}) - F(l) = C\,\frac{l}{6\,a}$$

$$\sigma_p^2 = 2\,\chi\,(\frac{h}{2}, l) - F(h, l) - F(l) = (\frac{3\,a}{4\,L} - \frac{a^2}{5\,L^2} - \frac{a^3}{6\,L\,h^2} + \frac{3\,a^4}{70\,L^2\,h^2}) \cdot C$$

Substituindo, valores e resolvendo o sistema, obtém-se o par óptimo:

$$\begin{cases} l = 6{,}70\ \text{m} \\ h = 76{,}3\ \text{m} \end{cases}$$

O que leva a traçar 4 galerias distanciadas de cerca de 75 m, e em cada uma delas abrir 150 rouços, distanciados de aproximadamente 6,67 m, ou seja, colher um total de 600 amostras.

O custo total será de $20{,}3 \cdot 10^6$ unidades monetárias (devido às aproximações feitas). Como era de esperar, a maior parte desta verba refere-se à traçagem das galerias de nível.

5.2 — Aplicação ao cálculo de reservas

Outra aplicação prática da estimação geoestatística é o cálculo da reserva mineral de jazidas. Este problema será retomado e desenvolvido no capítulo sobre krigagem, todavia apresentam-se desde já algumas noções relativas aos erros de estimação.

Assim, numa estimação global podem-se distinguir dois tipos de erros:

— um *erro geométrico*, ligado à ignorância dos limites exactos da mineralização;
— um *erro de qualidade*, ligado à estimação dos teores e outras características da mineralização.

O erro de qualidade afecta, por exemplo, a estimação dos teores médios, isto é, das quantidades de metal existentes. O erro geométrico, muito mais complexo de definir, afecta a estimação da geometria do jazigo e, portanto, as estimações de volumes e tonelagens de minério e também as quantidades de metal.

a) *Erro de qualidade:*

Considera-se, numa 1.ª fase, que a geometria e volume V do campo são conhecidos. Pretende-se estimar a característica média $Z_v = \frac{1}{V}\int_v Z(x)\,dx$ no campo (por exemplo o teor médio), sendo Z(x) o teor pontual, através de um estimador Z^* (que, se for o estimador de krigagem, é óptimo), e que na maior parte

das vezes é uma combinação linear de estimadores parciais (de painéis, blocos, pisos, etc.). Supõe-se, evidentemente, o campo estruturalmente homogéneo, de variograma $\gamma(h)$.

Então, o estimador global será dado por:

$$Z^* = \frac{1}{V} \sum_i v_i \, Z_i^* \qquad \text{com } V = \sum_i v_i$$

A variância de estimação global será calculada do modo já atrás referido.

b) *Erro geométrico*

O erro geométrico pode estar directamente ligado a hipóteses de ordem geológica (génese da jazida, tectónica, etc.), e então tem um carácter determinista pouco favorável à sua quantificação, ou pode apresentar um carácter parcial ou puramente aleatório, que é então possível de ser traduzido num modelo quantificável utilizando, por exemplo, a simulação.

G. MATHERON elaborou um método puramente probabilístico, formalizado na *Teoria Transitiva*, que permite a dedução de expressões para a variância de estimação de espaços a uma, duas ou três dimensões.

A V. R. neste caso é a variável em tudo ou nada, *indicatriz geométrica* K(x), definida por:

$$K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in J \\ 0 & \text{se} \quad x \notin J \end{cases}$$

O jazigo J é definido pela sua massa mineralizada (total ou, por exemplo, acima de um dado teor de corte), de volume:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\, dx$$

Em teoria transitiva define-se a função estrutural *covariograma transitivo* como:

$$P(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) \,.\, K(x+h)\, dx$$

Note-se que $V = P(O)$, como é evidente.

O erro de estimação geométrico é dado por:

$$\sigma_E^2(a) = a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} P(p\,.\,a) - \int_{-\infty}^{+\infty} P(h)\, dh$$

em que a é o volume da malha (Ver demonstração em G. MATHERON (11)).

Atendendo a que, quaisquer que sejam a forma e a grandeza de V,P(h) tem um comportamento linear na origem, o primeiro termo do desenvolvimento da expressão de $\sigma_E^2(a)$, quando a tende para zero, pode ser calculado, o que permite obter fórmulas aproximadas de fácil manipulação.

Assim, para 2 dimensões, vem para a variância relativa:

$$\frac{\sigma_s}{S^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{6} N_2 + 0{,}06 \frac{N_1}{N_2} \right) \qquad [\text{com } n \geqslant 10]$$

Sendo $2N_1$ e $2N_2$ (com $N_2 \leqslant N_1$) os números dos elementos paralelos aos dois lados da malha (a_1, a_2) que constituem o perímetro da reunião S* das n zonas de influência positivas. Note-se que o perímetro de eventuais lacunas no interior de S* entra no cálculo de N_1 e N_2, mas existindo partes do perímetro perfeitamente reconhecidas, estas não são contadas (por exemplo, limites de falhas geológicas, etc.).

Assim, sendo o estimador da reserva (em minério ou metal) medido pelo produto ou quociente de vários estimadores parciais (superfície, possança da camada, teor, densidade do minério, por exemplo), o erro global de estimação será calculado atendendo às regras de estimação de produtos e quocientes, que apresentam normalmente problemas difíceis de convergência.

Para variáveis seguindo leis lognormais, demonstra-se que:

Se: $P^* = A^*.B^*$, então: $$\frac{\sigma_P^2}{P^2} = \frac{\sigma_A^2}{A^2} + \frac{\sigma_B^2}{B^2} + 2\,\rho_{AB} \frac{\sigma_A}{A} \cdot \frac{\sigma_B}{B} + \ldots$$

Se: $Q^* = \dfrac{A^*}{B^*}$, então: $$\frac{\sigma_Q^2}{Q^2} = \frac{\sigma_A^2}{A^2} + \frac{\sigma_B^2}{B^2} - 2\,\rho_{AB} \frac{\sigma_A}{A} \cdot \frac{\sigma_B}{B} + \ldots$$

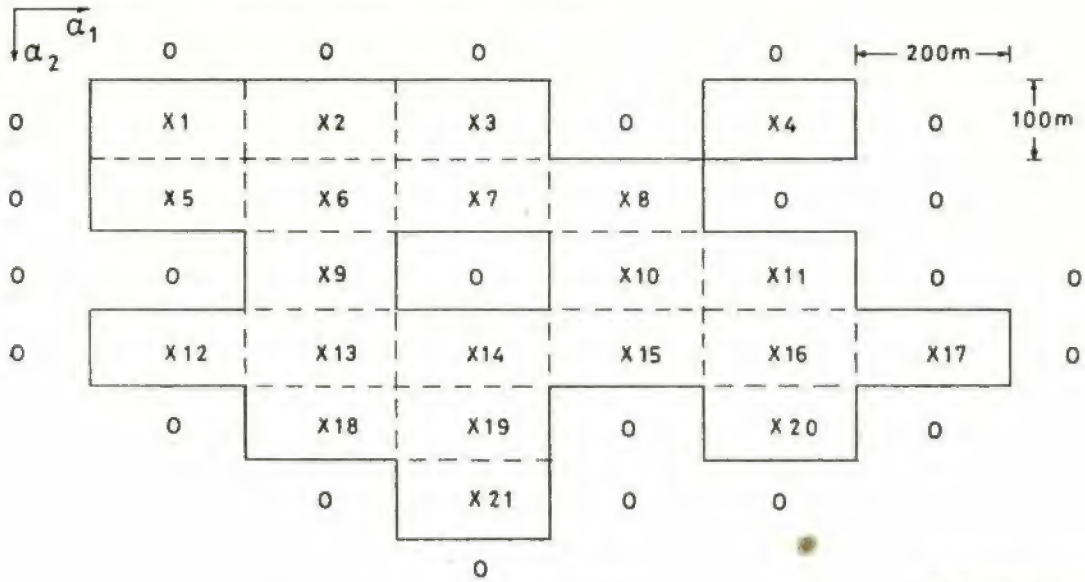
Sendo: $\rho_{AB} = \dfrac{E[(A-A^*)(B-B^*)]}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$ o coeficiente de correlação dos dois erros de estimação.

Estas expressões são, em geral, aplicáveis sem grande erro mesmo para variáveis não lognormais.

Em L. CORTEZ et al. (1), apresenta-se um exemplo prático da estimação da reserva de um jazigo do tipo camada, comparando os erros obtidos por diversos métodos.

Apresenta-se seguidamente outro exemplo prático de um cálculo global de reservas de um jazigo também do tipo camada, reconhecido por malha de amostragem regular. Este exemplo será bastante simplificado, visto se pretender apenas esquematizar os passos fundamentais do cálculo e comparar a precisão das hipóteses de aproximação referidas atrás.

Considere-se o jazigo estratiforme hematítico em cuja planta se assinalam as sondagens executadas para reconhecimento, com malha regular de 200 m × 100 m.



PLANTA DO JAZIGO

Sondagens positivas: x
Sondagens negativas: o

Em cada sondagem central positiva, mediu-se a espessura mineralizada e analisou-se o teor em Fe. Os resultados indicam-se no Quadro seguinte:

N.º Sondagem	Espessura (m)	Teor (% Fe)	Acumulação (m %)
1	0,8	51,2	40,96
2	1,4	54,7	76,58
3	2,0	55,4	110,80
4	0,7	47,3	33,11
5	1,3	48,9	63,57
6	2,0	53,2	106,40
7	1,8	54,0	97,20
8	1,6	50,5	80,80
9	1,5	54,0	81,00
10	2,2	50,1	110,22
11	2,4	49,3	118,32
12	0,9	46,0	41,40
13	0,9	47,5	42,75
14	2,0	50,5	101,00
15	1,6	49,9	79,84
16	2,7	48,6	131,22
17	0,8	47,0	37,60
18	1,8	45,2	81,36
19	1,6	49,5	79,20
20	2,0	47,4	94,80
21	1,0	45,3	45,30
Valor médio	1,57	49,79	78,73

Suponha-se que se pretende calcular a tonelagem total de minério e a quantidade total de metal (ferro) contido no jazigo, bem como o seu teor médio.

A tonelagem total de minério será dada por:

$$T = S \cdot \overline{\rho} \cdot \overline{h}$$

em que S é a área total mineralizada, ρ a densidade média do minério e h a espessura média mineralizada.

O seu estimador será:

$$T^* = S^* \cdot \overline{\rho^*} \cdot \overline{h^*}$$

Vamos supor que a densidade média se pode estimar sem erro, o que aliás é hipótese vulgar na prática. Seja: $\rho^* = 2{,}9$ ton m^{-3}.

Como estimador da superfície mineralizada, toma-se a união das 21 áreas de influência de cada sondagem positiva. Isto é:

$$S^* = 21 \times 200 \times 100 = 420 \times 10^3 \text{ m}^2$$

Para uma estimação global, é em geral suficiente tomar como estimador da V. R. (neste caso, a espessura mineralizada) a média (ponderada pelas áreas de influência, no caso de malhas irregulares) dos valores amostrados. Ou seja, neste caso: $\overline{h^*} = 1{,}57$ m.

Donde: $T^* = 420 \times 2{,}9 \times 1{,}57 \times 10^3 = 1.912.260$ ton

Este estimador está, evidentemente, afectado de um erro, que será medido pela sua variância relativa:

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_{\overline{h}}^2}{\overline{h}^2}$$

Dado que estas duas variáveis são manifestamente independentes e se admite que o erro na densidade é desprezável. Note-se que:

$\frac{\sigma_s}{S^2}$ é a variância do erro geométrico.

$\frac{\sigma_{\overline{h}}^2}{\overline{h}^2}$ é a variância do erro de qualidade.

Usando a expressão da teoria transitiva já indicada, e atendendo a que $n = 21$, $N_1 = N_2 = 9$, vem para o erro geométrico cometido na estimação da superfície mineralizada a variância:

$$\frac{\sigma_s^2}{S^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6} N_2 + 0{,}06 \frac{N_1^2}{N_2}\right) = \frac{1}{21^2}\left(\frac{9}{6} + \frac{0{,}06 \times 9^2}{9}\right) = 0{,}00463$$

O cálculo do erro de qualidade será feito através da variância de estimação, utilizando os princípios de aproximação já citados e, dado que a malha de reconhecimento é regular, recorrendo a ábacos. É óbvio que para tal é necessário traçar os variogramas experimentais da V. R. estimada e ajustar-lhe um modelo teórico.

Dado que a pequena extensão do jazigo que se escolheu para este exemplo não permite o traçado de variogramas suficientemente representativos e coerentes, vamos supor que o jazigo está englobado numa mineralização mais vasta, cujo estudo estrutural revelou um variograma da espessura que é ajustado por um esquema esférico isótropo com amplitude a = 400 m, Co = 0,20 e C = 0,85.

A variância do erro cometido ao tomar a média das espessuras amostradas como estimador da espessura mineralizada pode ser avaliada de três modos:

a) — pela variância de estimação dos rectângulos de influência através das suas amostras centrais;

b) — pela decomposição em fatias com a direcção α_1 (de 100 m de largura) reconhecidas através das suas linhas médias supostas conhecidas, sendo estas estimadas por extensão das amostras centrais aos seus segmentos de influência (de 200 m);

c) — idêntico ao anterior, mas com fatias na direcção α_2 (de 200 m de largura).

Em qualquer dos casos, como já se referiu, é necessário admitir a independência dos erros para se poder fazer a sua composição.

Far-se-á o cálculo pelos 3 processos, para efeitos de comparação de resultados:

a) — A variância de estimação do rectângulo de 200 m × 100 m pelo seu ponto central é dada por:

$$\sigma_E = 2\ H\left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}\right) - F(L, l)$$

As funções $H\left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}\right)$ e $F(L, l)$ são calculadas pelos ábacos n.os 3 e 4:

$$H\left(\frac{100}{400}, \frac{50}{400}\right) = 0{,}22\ C + C_o$$

$$F\left(\frac{200}{400}, \frac{100}{400}\right) = 0{,}295\ C + C$$

Donde $\sigma_e^2 = 2 \times (0{,}22 \times 0{,}85 + 0{,}20) - (0{,}295 \times 0{,}85 + 0{,}20) = 0{,}323$

Supondo os erros de estimação dos 21 rectângulos independentes:

$$\sigma_E^2 = \frac{0{,}323}{21} = 0{,}0154$$

Ou seja, uma variância relativa:

$$\frac{\sigma_{\bar{h}}^2}{\bar{h}^2} = \frac{0{,}0154}{1{,}57^2} = 0{,}00625$$

Logo:

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2} = 0{,}00463 + 0{,}00625 = 0{,}0109$$

O que corresponde, ao nível de confiança de 95 %, a um erro relativo de:

$$2\frac{\sigma_T}{T} = 0{,}2086 = 20{,}86\ \%$$

Ou seja, com 95 % de probabilidades, a tonelagem total está compreendida no intervalo:

[1 531 363 ton, 2 311 157 ton].

b) — O erro de linhas é calculado pela variância de estimação aos segmentos de influência de 200 m dos seus pontos centrais. Esta variância é dada no ábaco n.º 7: σ_{E1}^2, para $\frac{l}{a} = \frac{200}{400} = 0{,}5$

$$\sigma_e^2 = 0{,}13\ C + C_o = 0{,}13 \times 0{,}85 + 0{,}2 = 0{,}3105$$

A variância de extensão dos 21 pontos centrais aos seus segmentos será evidentemente:

$$\sigma_l^2 = \frac{0{,}3105}{21} = 0{,}0148$$

O erro de fatias tem por expressão:

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum_i l_i^2\ \sigma_{ei}^2}{(\sum_i l_i)^2}$$

Visto as fatias terem comprimentos l_i diferentes. A variância de extensão da mediana ao rectângulo de influência é dada no ábaco n.º 8, para $L/a = \frac{100}{400} = 0{,}25$ e l_i variável consoante os comprimentos das linhas. Na tabela seguinte indicam-se os valores obtidos, estando as fatias numeradas de cima para baixo.

Fatia n.º	Comprimento l_i	l_i/a	$\sigma^2_{\overline{\overline{III}}}$	$\sigma^2_{ei} = \sigma^2_{\overline{\overline{III}}} \cdot C$	$l_i^2\ \sigma^2_{ei}$
1	800	2,0	0,00425	0,0036	2 304
2	800	2,0	0,00425	0,0036	2 304
3	600	1,5	0,0050	0,00425	1 530
4	1200	3,0	0,0035	0,0030	4 320
5	600	1,5	0,0050	0,00425	1 530
6	200	0,5	0,0125	0,0106	424
Σ	4200	—	—	—	12 412

Donde: $\sigma_f^2 = \frac{12\,412}{4200^2} = 0{,}0007$

Então: $\sigma_E^2 = \sigma_l^2 + \sigma_f^2 = 0{,}0148 + 0{,}0007 = 0{,}0155$

Logo, a variância relativa vem:

$$\frac{\sigma^2_{\overline{h}}}{\overline{h}^2} = \frac{0{,}0155}{1{,}57^2} = 0{,}0063$$

Para a tonelagem total, vem:

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2} = 0{,}00463 + 0{,}0063 = 0{,}01093$$

Para o mesmo nível de confiança de 95 %, vem o erro relativo de:

$$2\frac{\sigma_T}{T} = 0{,}2091 = 20{,}91\ \%$$

Note-se que a utilização deste processo de decomposição em termo de linhas e termo de fatias conduz a um erro relativo quase idêntico ao processo de decomposição em rectângulos de influência. Note-se ainda que o efeito de pepita apenas entra no termo de linha, não entrando como factor aditivo no cálculo da variância de extensão do termo de fatia.

c) — Neste caso, para $\frac{l}{a} = \frac{100}{400}$, o erro de linhas é:

$$\sigma_e^2 = 0{,}064\ C + C_o = 0{,}2544$$

$$\sigma_l^2 = \frac{0{,}2544}{21} = 0{,}0121$$

O erro de fatias é obtido por uma tabela semelhante ao caso anterior, para $\frac{L}{a} = \frac{200}{400}$, e sendo as fatias numeradas da esquerda para a direita.

Fatia n.º	l_i (m)	l_i/a	$\sigma^2_{\overline{\overline{l\,l\,l}}}$	$\sigma^2_{ei} = \sigma^2_{\overline{\overline{l\,l\,l}}} \cdot C$	$l_i^2 \cdot \sigma^2_{ei}$
1	300	0,75	0,033	0,028	2 520
2	500	1,25	0,020	0,016	4 250
3	500	1,25	0,020	0,017	4 250
4	300	0,75	0,033	0,028	2 520
5	400	1,00	0,025	0,021	3 360
6	100	0,25	0,065	0,055	550
Σ	2100	—	—	—	17 450

Donde: $\sigma_f^2 = \dfrac{17.450}{2100^2} = 0{,}00396$

Logo: $\sigma_E^2 = 0{,}0121 + 0{,}0040 = 0{,}0161$

Ou seja: $\dfrac{\sigma^2_{\overline{h}}}{\overline{h}^2} = \dfrac{0{,}0161}{1{,}57^2} = 0{,}00653$

Então: $\dfrac{\sigma_T^2}{T^2} = 0{,}00463 + 0{,}00653 = 0{,}0112$

Donde, ao nível de confiança de 95 %:

$$2\,\frac{\sigma_T}{T} = 0{,}2113 = 21{,}13\ \%.$$

Como era de esperar, o erro obtido por composição de termos de linhas e de fatias é praticamente idêntico, independentemente da direcção em que se tomam as linhas.

Para o cálculo do *metal contido* e do teor médio do jazigo, utilizar-se-ão as acumulações $a_i = h_i\, t_i$, onde t_i é o teor tal-qual, como V. R.

Admite-se que o variograma das acumulações é bem ajustado por um esquema esférico isótropo, de amplitude idêntica ($a = 400$ m), $C_o = 0{,}10$ e $C = 0{,}50$.

A quantidade de ferro total pode ser estimada por:

$Q^* = S^* \cdot \rho^* \cdot \overline{a}^* = 420.10^3 \times 2{,}9 \times 0{,}788 = 959.784$ ton Fe. O erro deste estimador terá por variância:

$$\frac{\sigma_Q^2}{Q^2} = \frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma^2_{\overline{a}}}{\overline{a}^2}$$

Admite-se ainda que o erro na estimação da densidade média é desprezável, e que os dois erros (geométrico e de qualidade) são independentes.

O valor de σ_S^2/S^2 já foi anteriormente calculado. A variância da acumulação média pode ser avaliada por qualquer dos processos atrás descritos.

Utilizando o primeiro processo (que dá menor erro), obtém-se:

$$\sigma_E^2 = 2 \times (0{,}22 \times 0{,}50 + 0{,}10) - (0{,}295 \times 0{,}50 + 0{,}10) = 0{,}1752$$

$$\sigma_E^2 = \frac{0{,}1725}{21} = 0{,}00821$$

$$\frac{\sigma^2_{\overline{a}}}{\overline{a}^2} = \frac{0{,}00821}{0{,}725^2} = 0{,}0156$$

Como: $\dfrac{\sigma_S^2}{S^2} = 0{,}00463$ (já calculado), vem:

$$\frac{\sigma_Q^2}{Q^2} = 0{,}00463 + 0{,}0156 = 0{,}02023$$

Ou, ao nível de certeza de 95 %:

$$2\frac{\sigma_Q}{Q} = 0{,}2845 = 28{,}45\ \%$$

Ou seja, com 95 % de probabilidade, à quantidade de Fe está contido no intervalo: [686.725 ton, 1 232 843 ton].

O *teor médio* pode ser estimado por:

$$\bar{t}^{\,*} = \frac{Q^*}{T^*} = \frac{\bar{a}}{\bar{h}^*} = 0{,}5015 = 50{,}15\ \%\ \text{Fe}$$

Como, em geral, não é possível fazer a hipótese da independência dos erros de acumulação e de espessura, a estimação do erro do cociente será:

$$\frac{\sigma_{\bar{t}}^2}{\bar{t}^2} = \frac{\sigma_{\bar{a}}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_{\bar{h}}^2}{\bar{h}^2} - 2\,\rho_{ah}\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\cdot\frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}}$$

Dado que:

$$\frac{\sigma_{\bar{h}}^2}{\bar{h}^2} = 0{,}0156 \qquad \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}} = 0{,}1249$$

$$\frac{\sigma_{\bar{a}}^2}{\bar{a}^2} = 0{,}0223 \qquad \frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}} = 0{,}1493$$

E o coeficiente de correlação entre as acumulações e as espessuras é:

$$\rho_{ah} = 0{,}946$$

Vem:

$$\frac{\sigma_{\bar{t}}^2}{\bar{t}^2} = 0{,}0156 + 0{,}0223 - 2 \times 0{,}946 \times 0{,}125 + 0{,}149 = 0{,}00266$$

Ou ainda: $2\,\frac{\sigma_{\bar{t}}}{\bar{t}} = 0{,}1032 = 10{,}32\ \%$.

Isto é, com 95 % de probabilidade, o teor médio está contido no intervalo [44,97 % Fe, 55,33 % Fe].

Note-se que, nos cálculos efectuados neste exemplo muito simples, se fizeram dois tipos de *aproximações* que afectaram a precisão da estimação dos erros:

a) — admitiu-se o princípio da independência dos erros, na sua composição;

b) — utilizaram-se ábacos no cálculo das variâncias de estimação elementares.

A comparação dos valores obtidos pelos diferentes processos permite avaliar a influência das aproximações feitas e verificar assim, num caso prático, a validade dos princípios de aproximação usados na prática da estimação geoestatística.

6 — BIBLIOGRAFIA

[1] — **L. P. Cortez, H. G. Pereira, F. Muge** — Tratamento Geoestatístico de Parâmetros Mineiros — I CHILAGE, Com. P-8-1, Madrid, 1973.

[2] — **M. David** — The Notion of Extension Variance and its Application to the Grade Estimation of Stratiform Deposit — AIME (Decada), New York, 1969.

[3] — **M. David** — Geostatistical Ore Estimation: A Step-by-Step Case Study — Canadian Inst. of Min. and Met., Sp. Vol. 12, 1970.

[4] — **M. David** — A Short Course on Geostatistical Ore Reserve Estimation — École Polytechnique de Montreal, 1974.

[5] — **M. David** — Geostatistical Ore Reserve Estimation — ibid. 1975.

[6] — **C. Huijbregts** — Regionalized Variables and Applications to Quantitative Analysis and Estimation of Spatial Data — C. M. M. de Fontainebleau, 1973.

[7] — **A. Journel, J. Serra** — Exercices sur les Variables Regionalisées — C. M. M. — Fontainebleau — École d'Été de 1969.

[8] — **A. Journel** — From Geological Reconnaissance to Exploitation: A Decade of Applied Geostatistics — Can. Ins. of Min. and Met., Jun. 1975.

[9] — **A. Journel** — Guide Pratique de Geostatistique Minière — C. M. M. de Fontainebleau, 1975.

[10] — **A. Marechal** — Geostatistique et Applications Minières — Annales des Mines, Nov. 1975.

[11] — **G. Matheron** — Les Variables Régionalisées et leur Estimation — Ed. Masson, Paris, 1965.

[12] — **G. Matheron** — Présentation des Variables Régionalisées — Técnica n.º 368, Lisboa, 1967.

[13] — **G. Matheron** — Cours de Geostatistique — Cahiers du C. M. M. de Fontainebleau, Fasc. 2, 1969.

[14] — **G. Matheron** — La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications — ibid., Fasc. 5, 1970.

[15] — **F. Muge, L. P. Cortez, H. G. Pereira** — Apontamentos de Geoestatística — AEIST, Lisboa, 1974.

[16] — **H. G. Pereira** — Aplicações da Geoestatística — Técnica n.º 407, Lisboa, 1971.

[17] — **J. Serra** — Echantillonnage et Estimation Locale des Phénomènes de Transition Miniers — Tomes I et II — F. S. Nancy, 1967.

Novo sistema de armazenagem de informações

A Philips apresentou em Eindhoven um novo processo de armazenamento de informações que permite registar o conteúdo de 500 000 páginas dactilografadas num disco plastificado de trinta centímetros.

O conjunto apresenta-se sob a forma de um electrofone cujo disco, em vez de preto, é transparente e brilhante e onde o diamante foi substituído por um diodo laser cujo finíssimo feixe de luz forma, sobre a banda, uma mancha luminosa com um milésimo de milímetro de diâmetro.

Embora não se verifique qualquer contacto com o disco, é possível lê-lo estudando a luz que a sua superfície reflecte como um espelho. Com efeito, nas zonas de registo da informação — sob a forma de orifícios microscópios feitos na banda —, a luz não se reflecte tão bem e esta alternância de tons escuros e brilhantes permite uma rápida descodificação, sendo o tempo de acesso a um dado da ordem de um quarto de segundo. Mas, paralelamente com a forma de leitura, também a forma de registo electrónico assume especial importância. No sistema lançado pela Philips, basta aumentar a potência do diodo laser para fundir o material do disco e efectuar assim uma série de orifícios, característicos da informação a armazenar. O disco Philips tem capacidade para armazenar 10 mil milhões de «Bits», ou seja, o equivalente a uma enciclopédia em cem volumes, resultado que ultrapassa em grande medida os dos sistemas clássicos, na opinião dos investigadores holandeses.

A fórmula tem, porém, algumas desvantagens, pois, uma vez feita a gravação, não é possível apagá-la como acontece com os discos e bandas magnéticas. Os investigadores da empresa holandesa não desistiram, no entanto, de conseguir, até à comercialização deste produto, dentro de alguns anos, encontrar entretanto solução para este problema, e lançar, no mercado, discos de todas as dimensões, mais aperfeiçoados ainda e portadores de dados, textos, comentários e imagens para todos os fins.

[Extraído do «Boletim Mensal BFN», (12) Dezembro 1978].